

Юго-Западный государственный университет
Кафедра вычислительной техники

О ПОСТРОЕНИИ СПЕКТРОВ БЫСТРОВЫЧИСЛИМЫХ ЧИСЛОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ДИАГОНАЛЬНЫХ ЛАТИНСКИХ КВАДРАТОВ МАЛОГО ПОРЯДКА

Ватутин Э.И., Никитина Н.Н., Манзюк М.О.,
Альбертьян А.М., Курочкин И.И.

Тула, 2021



Понятие ЛК и ДЛК

$$A = \|a_{ij}\|$$

$$i, j = \overline{1, N}$$

$$N = |S|$$

$$S = \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$$

$$\forall i, j, k = \overline{1, N}, j \neq k: (a_{ij} \neq a_{ik}) \wedge (a_{ji} \neq a_{ki})$$

$$\forall i, j = \overline{1, N}, i \neq j: (a_{ii} \neq a_{jj}) \wedge (a_{N-i+1, N-i+1} \neq a_{N-j+1, N-j+1})$$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	9	4	3	6	7	5	0	8
2	9	3	1	7	0	5	8	4	6
3	4	1	2	8	7	9	6	5	0
4	3	5	9	2	1	8	0	6	7
5	6	4	8	1	2	0	9	7	3
6	5	8	7	0	3	2	1	9	4
7	8	6	0	9	4	1	2	3	5
8	7	0	5	6	9	3	4	1	2
9	0	7	6	5	8	4	3	2	1

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
7	2	4	9	0	6	5	1	3	8
8	3	6	7	5	9	0	2	4	1
2	6	8	5	1	7	4	0	9	3
5	8	9	1	7	0	3	4	6	2
9	4	1	2	8	3	7	6	0	5
4	7	5	6	9	1	8	3	2	0
3	0	7	8	2	4	1	9	5	6
6	5	0	4	3	2	9	8	1	7
1	9	3	0	6	8	2	5	7	4

Нормализованный ЛК порядка 10 Нормализованный ДЛК порядка 10

$$N! \times (N-1)!$$

$$(N-1)!$$



Числовые характеристики ЛК/ДЛК

Быстровычислимые:

- число интеркалятов;
- число (диагональных) трансверселей;

Относительно быстровычислимые:

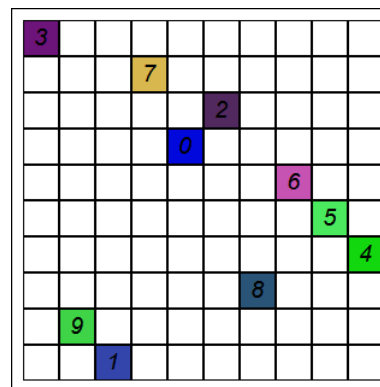
- число ОЛК/ОДЛК.

Не быстровычислимые:

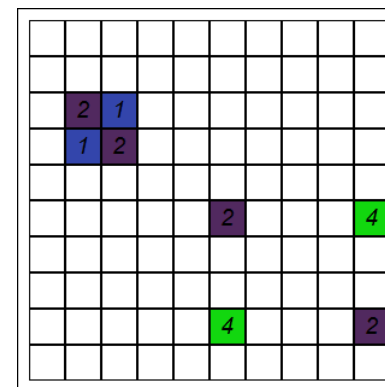
- число полных/частичных циклов;
- число тривиальных/нетривиальных латинских подпрямоугольников;
- мощность главного класса;
- ...

С числовыми характеристиками связаны соответствующие им числовые ряды в OEIS. Например, максимальное число трансверселей в ЛК порядка N:

1, 0, 3, 8, 15, 32, 133, 384, 2241 (<https://oeis.org/A090741>, R. Bean, B. McKey, I. Wanless, 2004)



Пример
трансверсали



Пример
интеркалятов



Понятие спектров числовых характеристик

The OEIS Foundation is supported by donations from users of the OEIS and by a grant from the Simons Foundation.

0 1 3 6 2 7
: 13
: 20
23 12
10 22 11 21
THE ON-LINE ENCYCLOPEDIA
OF INTEGER SEQUENCES®

founded in 1964 by N. J. A. Sloane

[Hints](#)
(Greetings from [The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences!](#))

A309344 $a(n)$ is the number of distinct numbers of transversals of order n Latin squares. 4

1, 1, 1, 2, 2, 4, 35, /4 (list: graph: refs: listen: history: edit: text: internal format)

OFFSET 1,4

COMMENTS We found all transversals in the main class Latin square representatives of order n .
These results are based upon work supported by the National Science Foundation under the grants numbered DMS-1852378 and DMS-1560019.

LINKS [Table of \$r, a\(n\)\$ for \$n=1..8\$.](#)
Brendan McKay, [Combinatorial Data](#)

EXAMPLE For $n=7$, the number of transversals that an order 7 Latin square may have is 3, 7, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 36, 37, 41, 43, 45, 47, 55, 63, or 133. Hence there are 35 distinct numbers of transversals of order 7 Latin squares, so $a(7)=35$.

PROG (MATLAB)
%This extracts entries from each column. For an example, if
%A=[1 2 3 4; 5 6 7 8; 9 10 11 12; 13 14 15 16], and if list = (2, 1, 4),
%this code extracts the second element in the first column, the first
%element in the second column, and the fourth element in the third column.
function [output] = extract(matrix, list)
for i=1:length(list)
output(i) = matrix(list(i), i);
end
end
%Searches matrix to find transversal and outputs the transversal.
function [output] = findtransversal(matrix)
n=length(matrix);
for i=1:n
partialtransversal(i, 1)=i;
end
for i=2:n
newpartialtransversal=[];
for j=1:length(partialtransversal)
for k=1:n
if (~ismember(k, partialtransversal(j, :)))&(~ismember(matrix(k, i),
extract(matrix, partialtransversal(j, :))))
newpartialtransversal=[newpartialtransversal;
[partialtransversal(j, :), k]];
end
end
end
partialtransversal=newpartialtransversal;
end
output=partialtransversal;
end
%Takes input of n^2 numbers with no spaces between them and converts it



Понятие спектров числовых характеристик

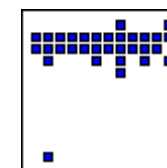
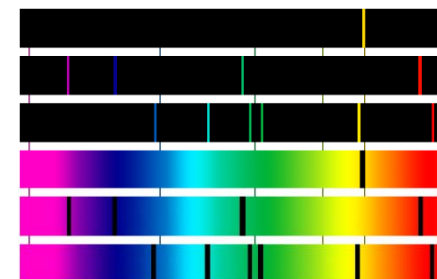
Спектр S — множество числовых значений выбранной числовой характеристики X комбинаторных объектов заданного типа.

Пример:

- тип комбинаторных объектов — ДЛК порядка 7;
- числовая характеристика — число диагональных трансверселей.

$$S_{dt, DLS7} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 27\}$$

```
spectrum_dls_diagonal_transversals_n7_14_items.txt — Блокнот
Файл  Правка  Формат  Вид  Справка
0 0352641214630534215605603124106543262140534530216
1 0345261213460564205135603142156243032160544051326
2 0356241213560436245105403162106243562410534510326
3 0356241213560434215605643012106243562041534510326
4 0345261213460564205135613042356142012063544052136
5 0354261213560414265305613042306241562401534501326
6 0345261513460264215302603145156042332160544052316
7 0354621214630514205635613240306541262310544502136
8 0354261314560214265302603145506241362103544531026
9 0354261314560214265302603145506241362310544510326
10 0352641613420536205145403162256143012460534015326
11 0356241314560216245302403165506241362103544531026
13 0245631315620413245604613025506241364013522530146
27 0245361610452315260344653102236041534126505031246
```



http://evatutin.narod.ru/spectra/spectrum_dls_diagonal_transversals_n7_14_items.txt



Понятие спектров числовых характеристик (продолжение)

Параметры спектра S :

- минимальное/максимальное значение $\inf S = X_{\min}$, $\sup S = X_{\max}$;
- ширина спектра $w(S) = \sup S - \inf S + 1$;
- мощность спектра $|S|$.

Пример:

$$S_{dt, DLS7} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 27\}$$

$$\inf S_{dt, DLS7} = 0$$

$a(7)=0$ в числовом ряду <https://oeis.org/A287647>

$$\sup S_{dt, DLS7} = 27$$

$a(7)=27$ в <https://oeis.org/A287648>

$$w(S_{dt, DLS7}) = 27 - 0 + 1 = 28$$

$$|S_{dt, DLS7}| = 14$$

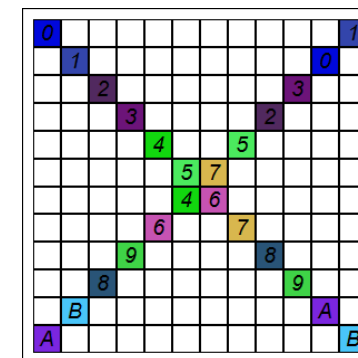
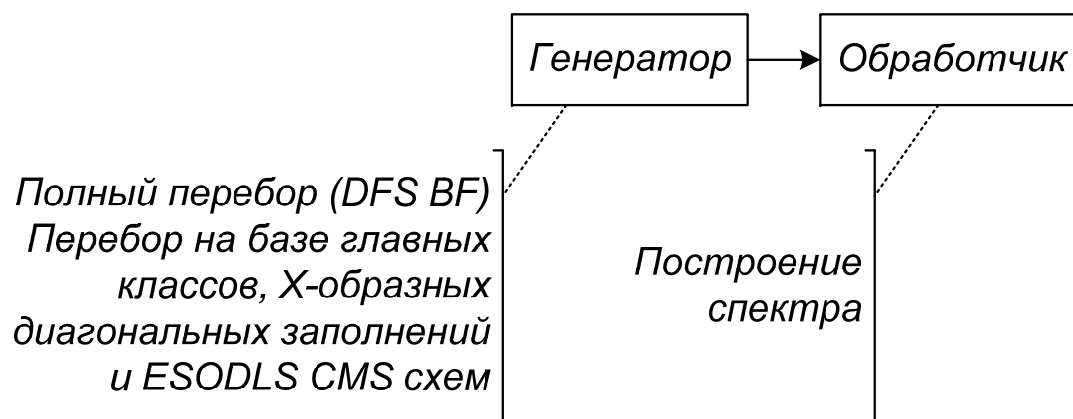
$a(7)=14$ в <https://oeis.org/A345370>

Примеры аналитических формул — максимальное число интеркалятов в ЛК (<https://oeis.org/A092237>), точная аналитическая верхняя граница:

$$a(2^n) = \frac{n^2(n-1)}{4}, \quad a(2^n - 1) = \frac{n(n-1)(n-3)}{4}$$



Обобщенная схема вычислительных экспериментов



<https://oeis.org/A309283>

Затраты вычислительного времени:

- $1 \leq N \leq 7$ — несколько десятков секунд;
- $N=8$ — 24 минуты в 1 поток на Core i7 4770;
- $N=9$ — несколько месяцев на грид (прогноз);
- $N > 9$ — возможно построение только аппроксимаций спектров с использованием эвристических методов.

DLS A	CMS	DLS B
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9	77 47 97 67 57 47 37 7 87 27	6 8 1 9 0 4 3 7 5 2
1 2 0 4 3 7 9 8 6 5	71 11 91 61 51 41 31 1 81 21	5 2 3 8 4 9 0 1 7 6
7 6 1 5 9 3 0 2 4 8	79 19 99 69 59 49 39 9 89 29	0 5 4 3 6 7 1 9 2 8
5 0 8 7 6 2 4 3 9 1	76 16 96 66 56 46 36 6 86 26	2 9 7 5 8 3 4 6 1 0
6 9 5 2 8 1 3 4 0 7	75 15 95 65 55 45 35 5 85 25	4 7 0 6 9 1 2 5 8 3
3 4 7 1 5 9 8 0 2 6	74 14 94 64 54 44 34 4 84 24	1 3 2 7 5 8 6 4 0 9
2 8 4 0 7 6 5 9 1 3	73 13 93 63 53 43 33 3 83 23	8 4 9 0 1 2 7 3 6 5
9 5 3 8 1 4 2 6 7 0	72 12 92 62 52 42 32 2 82 22	9 1 8 2 3 6 5 0 4 7
4 7 9 6 0 8 1 5 3 2		7 6 5 1 2 0 9 8 3 4
8 3 6 9 2 0 7 1 5 4		3 0 6 4 7 5 8 2 9 1

Пример схемы отображения ячеек (сокр. CMS)



Числовые ряды мощностей спектров

Новые числовые ряды, добавленные в OEIS:

- **A344105** — спектр числа трансверселей в ДЛК (1, 0, 0, 1, 2, 1, 32, 73);
- **A345370** — спектр числа диагональных трансверселей в ДЛК (1, 0, 0, 1, 2, 2, 14, 47);
- **A345760** — спектр числа интеркалятов в ДЛК (0, 0, 0, 1, 2, 1, 21, 61);
- **A345761** — спектр числа ОДЛК в ДЛК (1, 0, 0, 1, 2, 1, 3, 31, 99).

Числовые ряды для ОДЛК (планируются к добавлению в OEIS):

- спектр числа трансверселей в ДЛК (1, 0, 0, 1, 1, 0, 4, 25, 295);
- **A349199** (на подтверждении) — спектр числа диагональных трансверселей в ДЛК (1, 0, 0, 1, 1, 0, 3, 31, 165);
- спектр числа интеркалятов в ДЛК (1, 0, 0, 1, 1, 0, 3, 26, 55);
- спектр числа ОДЛК в ДЛК (1, 0, 0, 1, 1, 0, 2, 30, 98).



Числовые ряды для $\sup S$ и $\inf S$

Числовые ряды для ОДЛК (планируются к добавлению в OEIS):

- минимальное число трансверсалей в ОДЛК (**1, 0, 0, 8, 15, 0, 23, 16, 132**);
- минимальное число диагональных трансверсалей в ОДЛК (**1, 0, 0, 4, 5, 0, 8, 8, 14**);
- минимальное число интеркалятов в ОДЛК (**0, 0, 0, 12, 0, 0, 0, 2, 0**);
- максимальное число интеркалятов в ОДЛК (**0, 0, 0, 12, 0, 0, 18, 112, 72**);
- минимальное число ОДЛК для ОДЛК (**1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1**).





Верхние ограничения на мощности спектров отталкиваясь от мощностей главных классов ДЛК

$$A_{344105}(N) \leq A_{287764}(N),$$

$$A_{345370}(N) \leq A_{287764}(N),$$

$$A_{345760}(N) \leq A_{287764}(N),$$

$$A_{345761}(N) \leq A_{287764}(N).$$

«=» — для всех главных классов значение числовых характеристик в спектре различно;

«<» — есть совпадающие значения.

$$DLS \subseteq LS$$



$$0 \leq X_{\min}^{LS}(N) \leq X_{\min}^{DLS}(N) \leq X_{\max}^{DLS}(N) \leq X_{\max}^{LS}(N)$$

Аналогичные соотношения можно записать для ОЛК/ОДЛК и для мощностей соответствующих спектров.





Сплошные спектры?

Спектр S называется сплошным, если он образован идущими подряд значениями $\inf S = X_{\min}, X_{\min}+1, X_{\min}+2, \dots, \sup S = X_{\max}$

$$|S_X| = X_{\max} - X_{\min} + 1 = w(S_X)$$

Ни один известный спектр мощностью более 1 не является сплошным (для малых порядков $N < 9$ доказано полным перебором, для $N \geq 9$ — вычислительно трудными экспериментами в проекте Gerasim@Home).

$$|S_X| < X_{\max} - X_{\min} + 1$$

$$A344105(N) \leq A287644(N) - A287645(N) + 1,$$

$$A345370(N) \leq A287648(N) - A287647(N) + 1,$$

$$A345760(N) \leq A307164(N) - A307163(N) + 1,$$

$$A345761(N) \leq A287695(N) + 1.$$

Однако в некоторых спектрах есть сплошные участки...



Аппроксимация спектров порядков $N \geq 9$

Число трансверсалей в ДЛК (**A344105**):

$$\begin{aligned} a(9) \geq 296, a(10) \geq 193, a(11) \geq ?, a(12) \geq 22149 & (*) \\ a(9) \geq 359, a(10) \geq 442, a(11) \geq 1158, a(12) \geq 22407 & (**) \end{aligned}$$

Число диагональных трансверсалей в ДЛК (**A345370**):

$$\begin{aligned} a(9) \geq 166, a(10) \geq 389, a(11) \geq ?, a(12) \geq 17620 & (*) \\ a(9) \geq 176, a(10) \geq 736, a(11) \geq 353, a(12) \geq 17641 & (**) \end{aligned}$$

Число интеркалятов в ДЛК (**A345760**):

$$\begin{aligned} a(9) \geq 55, a(10) \geq 72, a(11) \geq ?, a(12) \geq 210 & (*) \\ a(9) \geq 62, a(10) \geq 88, a(11) \geq 100, a(12) \geq 210 & (**) \end{aligned}$$

Число ОДЛК в ДЛК (**A345761**):

$$\begin{aligned} a(10) \geq 10, a(11) \geq 36, a(12) \geq 2134 & (*) \\ a(10) \geq 10, a(11) \geq 36, a(12) \geq 2734 & (**) \end{aligned}$$

Спектры близки к пределу

Спектры допускают расширение, соответствующие вычислительные эксперименты выполняются

(*) на момент подачи публикации [19.10.2021]

(**) на момент составления презентации [15.11.2021]



Усиление известных верхних/нижних границ с использованием алгоритмов построения спектров

Минимальное число трансверселей в ДЛК (**A287645**):

$$a(10) \leq 408, a(11) \leq 2477, a(12) \leq 1672 \quad (*)$$

$$a(10) \leq 144, a(11) \leq 2091, a(12) \leq 1312 \quad (**)$$

Максимальное число трансверселей в ДЛК (**A287644**):

$$a(12) \geq 198144$$

Минимальное число диагональных трансверселей в ДЛК (**A287647**):

$$a(10) \leq 15, a(11) \leq 279, a(12) \leq 66 \quad (*)$$

$$a(10) \leq 3, a(11) \leq 199, a(12) \leq 50 \quad (**)$$

Максимальное число диагональных трансверселей в ДЛК (**A287648**):

$$a(12) \geq 30192 \quad (*)$$

$$a(10) \geq 890 \quad (**)$$

Максимальное число интеркалятов в ДЛК (**A307164**):

$$a(12) \geq 252$$

Максимальное число ОДЛК в ДЛК (**A287695**):

$$a(12) \geq 3855983322$$

SEU errors ☹

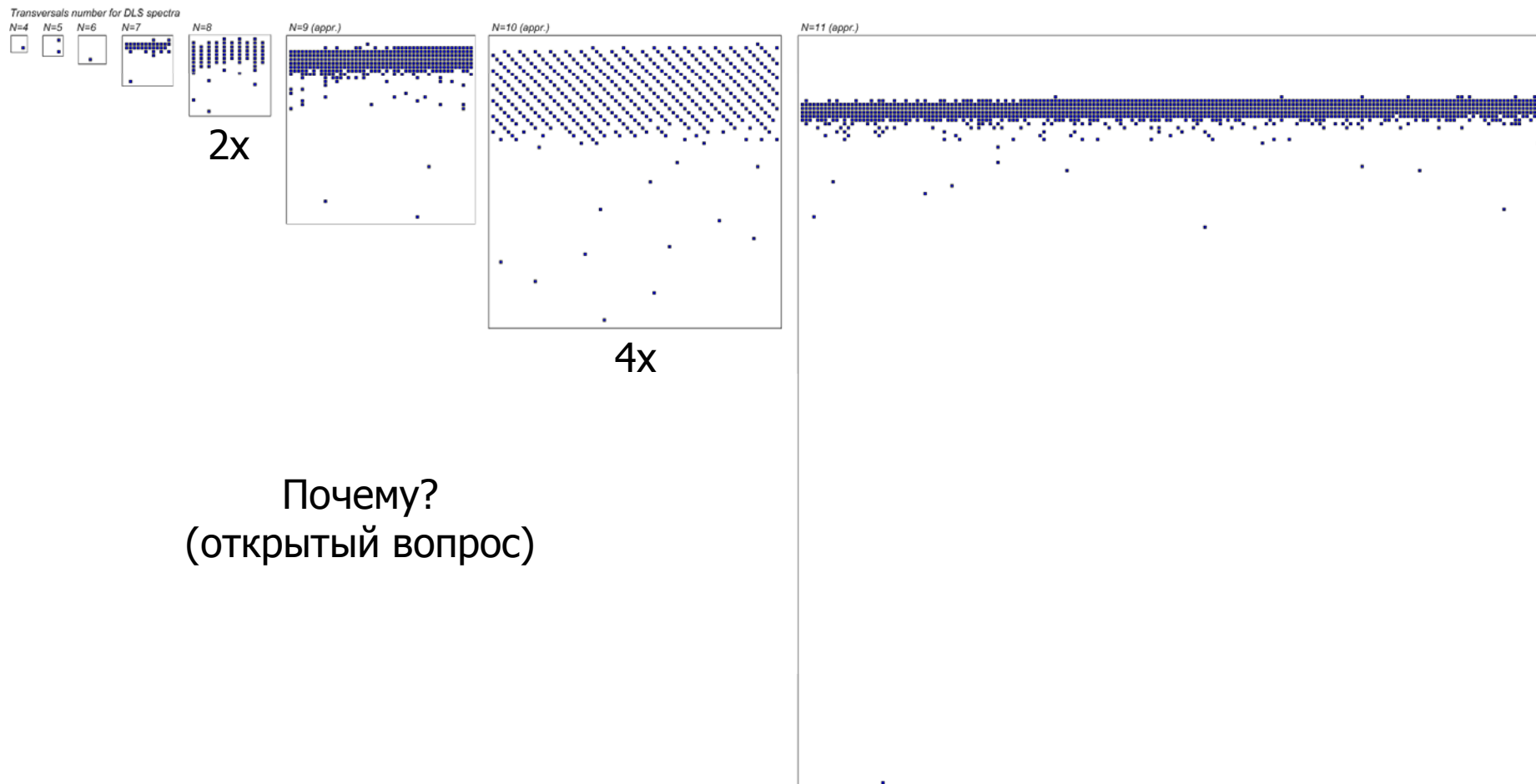
(**) ~1 месяц
счета на грид!

(*) на момент подачи публикации [19.10.2021]

(**) на момент составления презентации [15.11.2021]

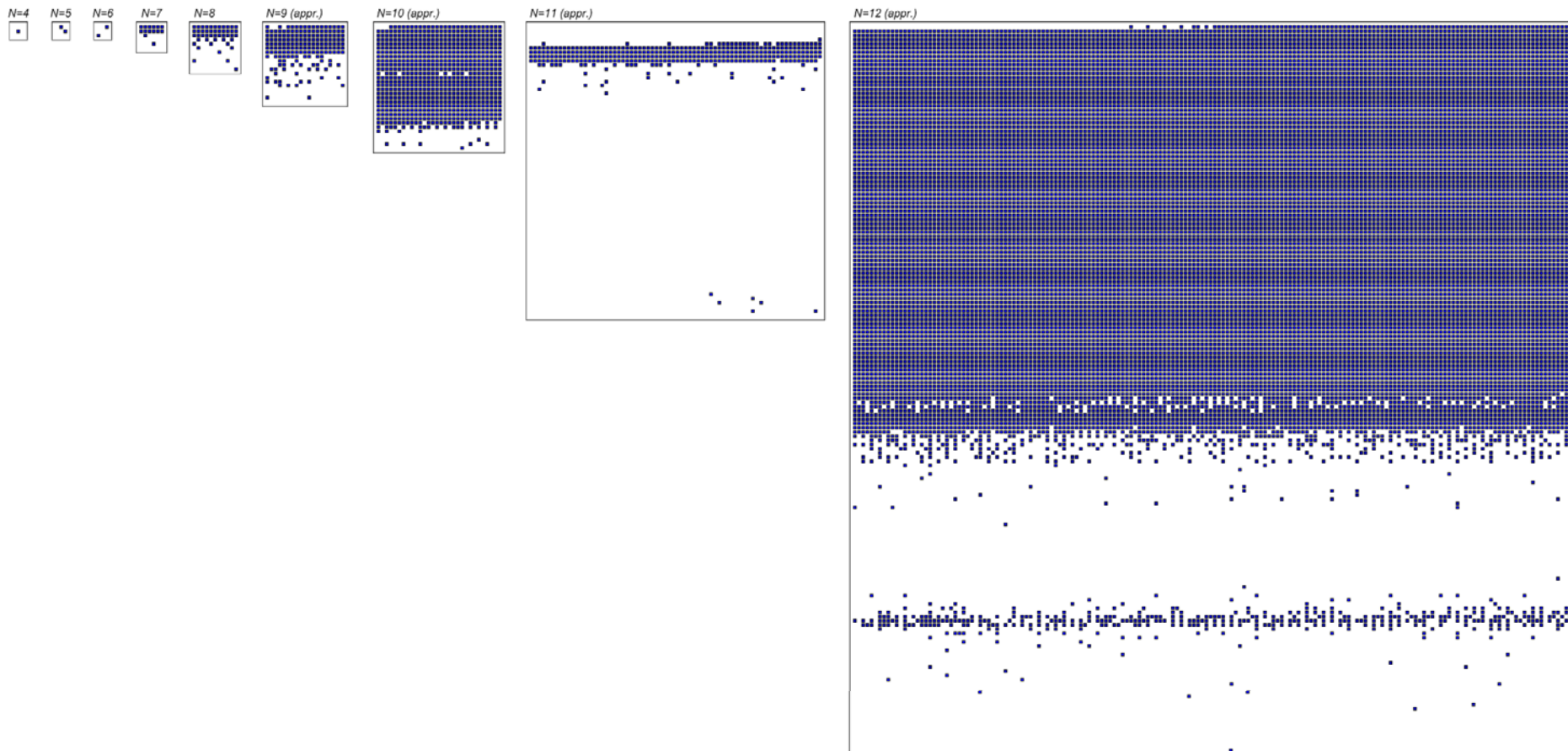


Графическое представление спектров: число трансверселей в ДЛК



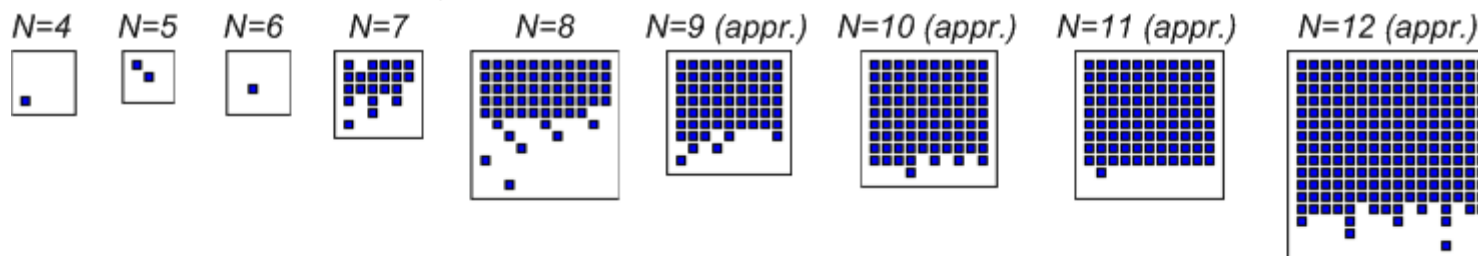
Графическое представление спектров: число диагональных трансверселей в ДЛК

Diagonal transversals number for DLS spectra

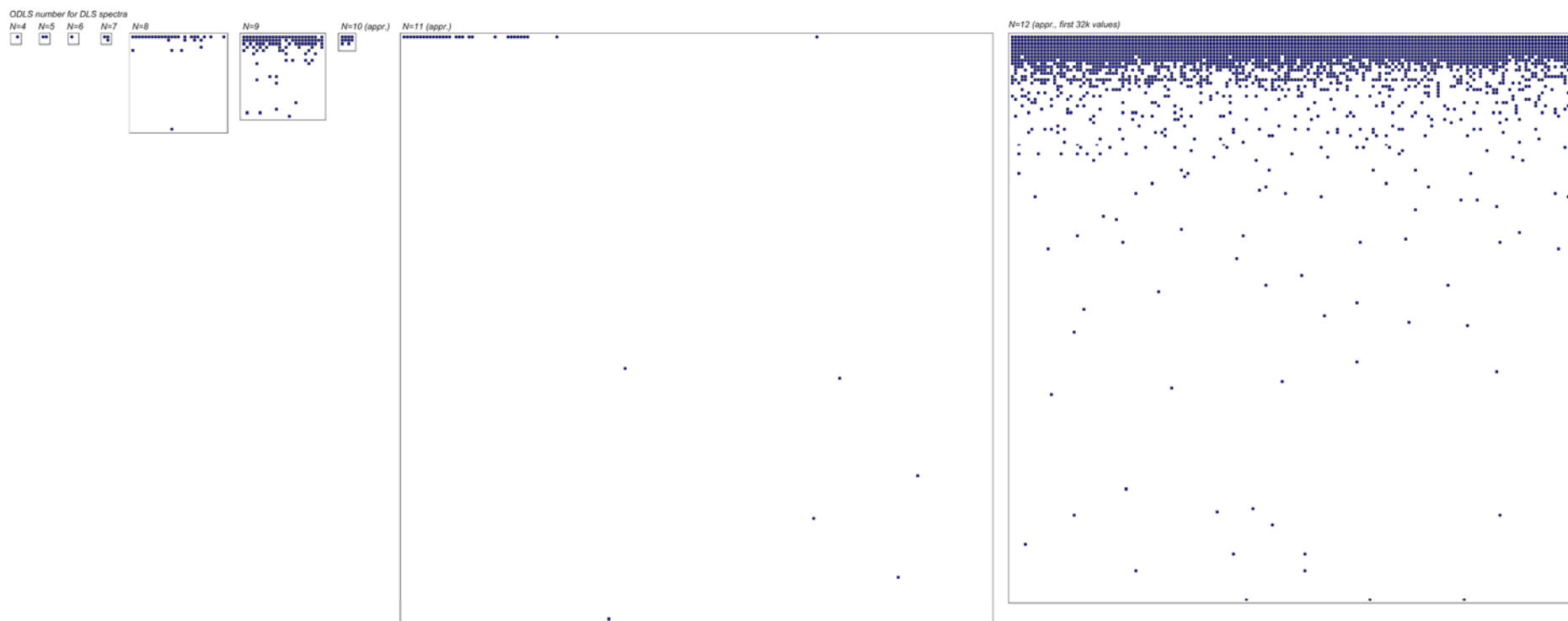


Графическое представление спектров: число интеркалятов в ДЛК

Intercalates number for DLS spectra



Графическое представление спектров: число ОДЛК в ДЛК

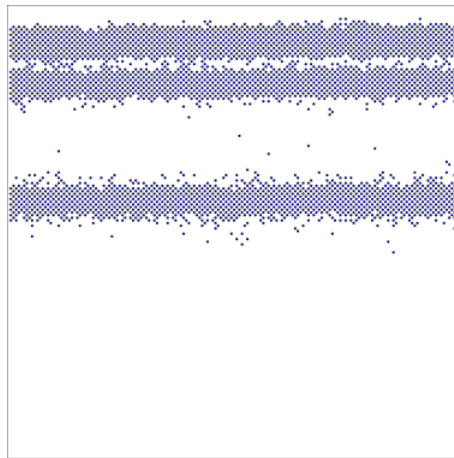


Расчет в настоящее время
выполняется в проектах
Gerasim@home и RakeSearch + 2
потока без грид
<https://gerasim.boinc.ru>
<https://rake.boincfast.ru/rakesearch/>

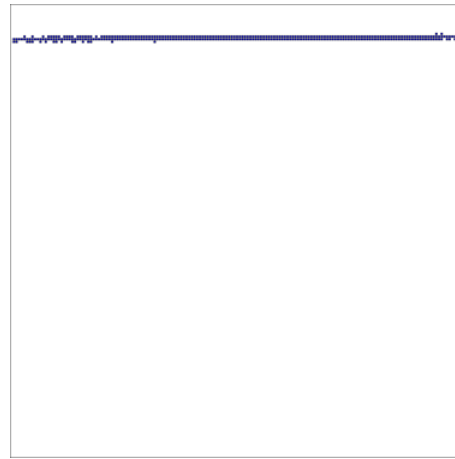
http://evatutin.narod.ru/spectra/spectra_dls_odls_all.png



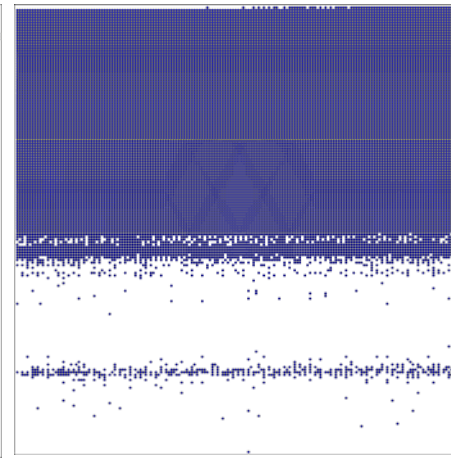
Построение спектра диагональных трансверселей в ДЛК порядка 12 (пример)



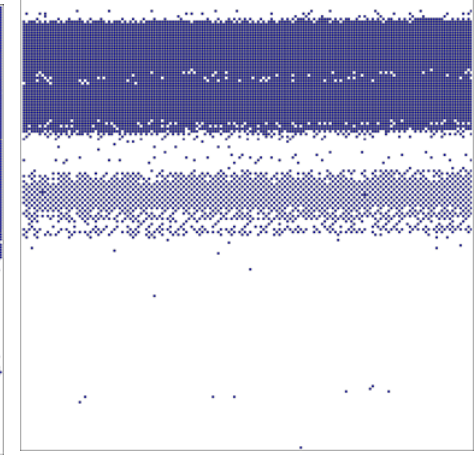
Случайные ДЛК Брауна



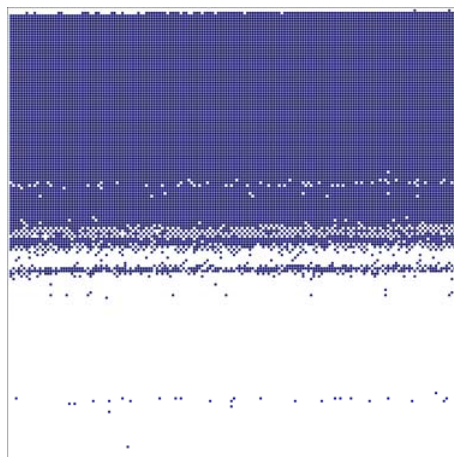
Случайные ДЛК



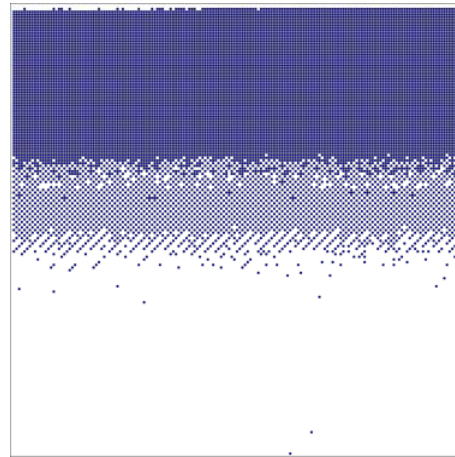
ДЛК (17497 элементов)



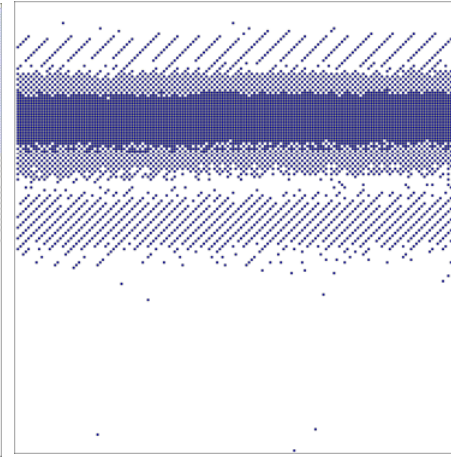
ОДЛК (8763 элементов)



Случайные ДЛК Брауна +
окрестности



Окрестность дважды
Брауна, вращение 1 цикла



Окрестность дважды
Брауна, вращение 1
интеркалята



Центрально симметричные
ОДЛК

- планируется доклад на НСКФ 2021 (03.12.2021)



Спасибо за внимание!

Выражаем благодарность всем добровольцам,
принимаящим участие в проектах добровольных
распределенных вычислений Gerasim@home и
RakeSearch!

WWW: <http://evatutin.narod.ru>, <https://gerasim.boinc.ru>,
<https://rake.boincfast.ru/rakesearch/>

E-mail: evatutin@rambler.ru

