

Юго-Западный государственный университет
Кафедра вычислительной техники

**О ПОСТРОЕНИИ СПЕКТРОВ
ЧИСЛОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК
ДИАГОНАЛЬНЫХ ЛАТИНСКИХ
КВАДРАТОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ
ГРИД СИСТЕМ НА
ДОБРОВОЛЬНОЙ ОСНОВЕ**

Ватутин Э.И.

Переславль-Залесский, 2021



Понятие ЛК и ДЛК

$$A = \|a_{ij}\|$$

$$i, j = \overline{1, N}$$

$$N = |S|$$

$$S = \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$$

$$\forall i, j, k = \overline{1, N}, j \neq k: (a_{ij} \neq a_{ik}) \wedge (a_{ji} \neq a_{ki})$$

$$\forall i, j = \overline{1, N}, i \neq j: (a_{ii} \neq a_{jj}) \wedge (a_{N-i+1, N-i+1} \neq a_{N-j+1, N-j+1})$$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	9	4	3	6	7	5	0	8
2	9	3	1	7	0	5	8	4	6
3	4	1	2	8	7	9	6	5	0
4	3	5	9	2	1	8	0	6	7
5	6	4	8	1	2	0	9	7	3
6	5	8	7	0	3	2	1	9	4
7	8	6	0	9	4	1	2	3	5
8	7	0	5	6	9	3	4	1	2
9	0	7	6	5	8	4	3	2	1

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
7	2	4	9	0	6	5	1	3	8
8	3	6	7	5	9	0	2	4	1
2	6	8	5	1	7	4	0	9	3
5	8	9	1	7	0	3	4	6	2
9	4	1	2	8	3	7	6	0	5
4	7	5	6	9	1	8	3	2	0
3	0	7	8	2	4	1	9	5	6
6	5	0	4	3	2	9	8	1	7
1	9	3	0	6	8	2	5	7	4

Нормализованный ЛК порядка 10 Нормализованный ДЛК порядка 10

$$N! \times (N-1)!$$

$$(N-1)!$$



Числовые характеристики ЛК/ДЛК

Быстровычислимые:

- число интеркалятов;
- число (диагональных) трансверселей;

Относительно быстровычислимые:

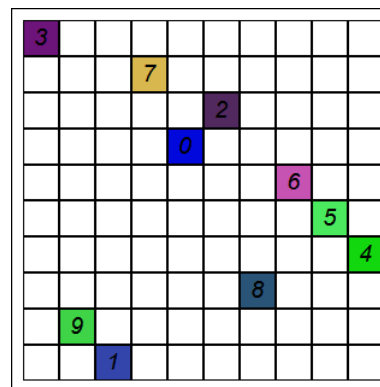
- число ОЛК/ОДЛК.

Не быстровычислимые:

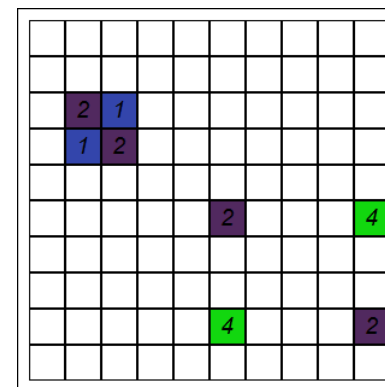
- число полных/частичных циклов;
- число тривиальных/нетривиальных латинских подпрямоугольников;
- мощность главного класса;
- ...

С числовыми характеристиками связаны соответствующие им числовые ряды в OEIS. Например, максимальное число трансверселей в ЛК порядка N:

1, 0, 3, 8, 15, 32, 133, 384, 2241 (<https://oeis.org/A090741>, R. Bean, B. McKey, I. Wanless, 2004)



Пример
трансверсали



Пример
интеркалятов



Понятие спектров числовых характеристик

The OEIS Foundation is supported by donations from users of the OEIS and by a grant from the Simons Foundation.

0 1 3 6 2 7
: 13
: 20
23 12
10 22 11 21
THE ON-LINE ENCYCLOPEDIA
OF INTEGER SEQUENCES®

founded in 1964 by N. J. A. Sloane

[Hints](#)
(Greetings from The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences!)

A309344 $a(n)$ is the number of distinct numbers of transversals of order n Latin squares. 4

1, 1, 1, 2, 2, 4, 35, 74 (list; graph; refs; listen; history; edit; text; internal format)

OFFSET 1,4

COMMENTS We found all transversals in the main class Latin square representatives of order n .
These results are based upon work supported by the National Science Foundation under the grants numbered DMS-1852378 and DMS-1560019.

LINKS [Table of \$r, a\(n\)\$ for \$n=1..8\$.](#)
Brendan McKay, [Combinatorial Data](#)

EXAMPLE For $n=7$, the number of transversals that an order 7 Latin square may have is 3, 7, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 36, 37, 41, 43, 45, 47, 55, 63, or 133. Hence there are 35 distinct numbers of transversals of order 7 Latin squares, so $a(7)=35$.

PROG (MATLAB)
%This extracts entries from each column. For an example, if
%A=[1 2 3 4; 5 6 7 8; 9 10 11 12; 13 14 15 16], and if list = (2, 1, 4),
%this code extracts the second element in the first column, the first
%element in the second column, and the fourth element in the third column.
function [output] = extract(matrix, list)
for i=1:length(list)
output(i) = matrix(list(i), i);
end
end
%Searches matrix to find transversal and outputs the transversal.
function [output] = findtransversal(matrix)
n=length(matrix);
for i=1:n
partialtransversal(i, 1)=i;
end
for i=2:n
newpartialtransversal=[];
for j=1:length(partialtransversal)
for k=1:n
if (~ismember(k, partialtransversal(j, :)))&(~ismember(matrix(k, i),
extract(matrix, partialtransversal(j, :))))
newpartialtransversal=[newpartialtransversal;
[partialtransversal(j, :), k]];
end
end
end
partialtransversal=newpartialtransversal;
end
output=partialtransversal;
end
%Takes input of n^2 numbers with no spaces between them and converts it



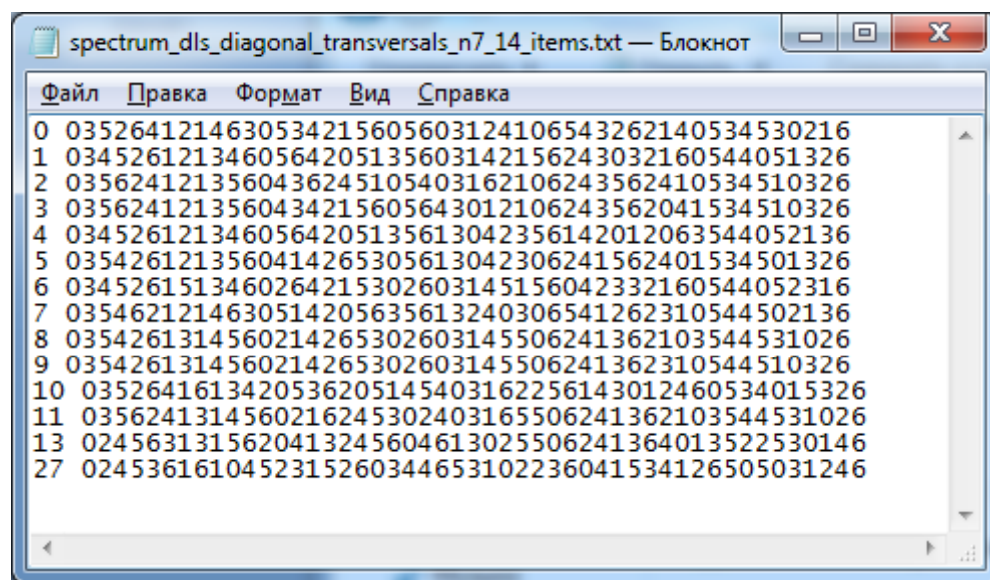
Понятие спектров числовых характеристик

Спектр S — множество числовых значений выбранной числовой характеристики X комбинаторных объектов заданного типа.

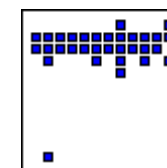
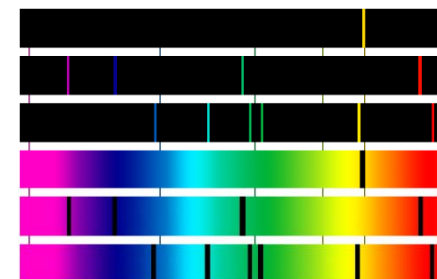
Пример:

- тип комбинаторных объектов — ДЛК порядка 7;
- числовая характеристика — число диагональных трансверселей.

$$S_{dt, DLS7} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 27\}$$



```
spectrum_dls_diagonal_transversals_n7_14_items.txt — Блокнот
Файл  Правка  Формат  Вид  Справка
0 0352641214630534215605603124106543262140534530216
1 0345261213460564205135603142156243032160544051326
2 0356241213560436245105403162106243562410534510326
3 0356241213560434215605643012106243562041534510326
4 0345261213460564205135613042356142012063544052136
5 0354261213560414265305613042306241562401534501326
6 0345261513460264215302603145156042332160544052316
7 0354621214630514205635613240306541262310544502136
8 0354261314560214265302603145506241362103544531026
9 0354261314560214265302603145506241362310544510326
10 0352641613420536205145403162256143012460534015326
11 0356241314560216245302403165506241362103544531026
13 0245631315620413245604613025506241364013522530146
27 0245361610452315260344653102236041534126505031246
```



http://evatutin.narod.ru/spectra/spectrum_dls_diagonal_transversals_n7_14_items.txt



Понятие спектров числовых характеристик (продолжение)

Параметры спектра S :

- минимальное/максимальное значение $\inf S = X_{\min}$, $\sup S = X_{\max}$;
- ширина спектра $w(S) = \sup S - \inf S + 1$;
- мощность спектра $|S|$.

Пример:

$$S_{dt, DLS7} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 27\}$$

$$\inf S_{dt, DLS7} = 0$$

$a(7)=0$ в числовом ряду <https://oeis.org/A287647>

$$\sup S_{dt, DLS7} = 27$$

$a(7)=27$ в <https://oeis.org/A287648>

$$w(S_{dt, DLS7}) = 27 - 0 + 1 = 28$$

$$|S_{dt, DLS7}| = 14$$

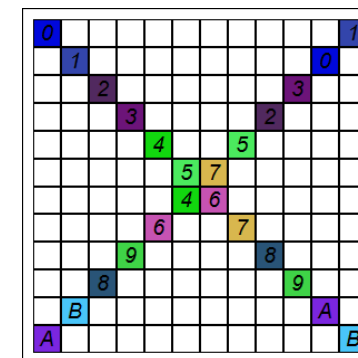
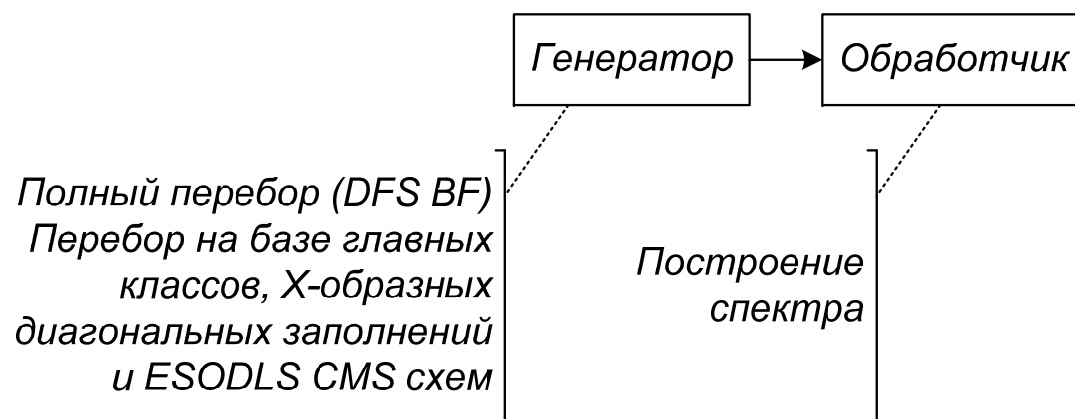
$a(7)=14$ в <https://oeis.org/A345370>

Примеры аналитических формул — максимальное число интеркалятов в ЛК (<https://oeis.org/A092237>), точная аналитическая верхняя граница:

$$a(2^n) = \frac{n^2(n-1)}{4}, \quad a(2^n - 1) = \frac{n(n-1)(n-3)}{4}$$



Обобщенная схема вычислительных экспериментов



<https://oeis.org/A309283>

Затраты вычислительного времени:

- $1 \leq N \leq 7$ — несколько десятков секунд;
- $N=8$ — 24 минуты в 1 поток на Core i7 4770;
- $N=9$ — несколько месяцев на грид (прогноз);
- $N > 9$ — возможно построение только аппроксимаций спектров с использованием эвристических методов.

DLS A	CMS	DLS B
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9	77 47 97 67 57 47 37 7 87 27	6 8 1 9 0 4 3 7 5 2
1 2 0 4 3 7 9 8 6 5	71 11 91 61 51 41 31 1 81 21	5 2 3 8 4 9 0 1 7 6
7 6 1 5 9 3 0 2 4 8	79 19 99 69 59 49 39 9 89 29	0 5 4 3 6 7 1 9 2 8
5 0 8 7 6 2 4 3 9 1	76 16 96 66 56 46 36 6 86 26	2 9 7 5 8 3 4 6 1 0
6 9 5 2 8 1 3 4 0 7	75 15 95 65 55 45 35 5 85 25	4 7 0 6 9 1 2 5 8 3
3 4 7 1 5 9 8 0 2 6	74 14 94 64 54 44 34 4 84 24	1 3 2 7 5 8 6 4 0 9
2 8 4 0 7 6 5 9 1 3	73 13 93 63 53 43 33 3 83 23	8 4 9 0 1 2 7 3 6 5
9 5 3 8 1 4 2 6 7 0	72 12 92 62 52 42 32 2 82 22	9 1 8 2 3 6 5 0 4 7
4 7 9 6 0 8 1 5 3 2		7 6 5 1 2 0 9 8 3 4
8 3 6 9 2 0 7 1 5 4		3 0 6 4 7 5 8 2 9 1

Пример схемы отображения ячеек (сокр. CMS)



Числовые ряды мощностей спектров

Новые числовые ряды, добавленные в OEIS:

- **A344105** — спектр числа трансверселей в ДЛК (**1, 0, 0, 1, 2, 1, 32, 73**);
- **A345370** — спектр числа диагональных трансверселей в ДЛК (**1, 0, 0, 1, 2, 2, 14, 47**);
- **A345760** — спектр числа интеркалятов в ДЛК (**0, 0, 0, 1, 2, 1, 21, 61**);
- **A345761** — спектр числа ОДЛК в ДЛК (**1, 0, 0, 1, 2, 1, 3, 31, 99**).

Числовые ряды для ОДЛК (планируются к добавлению в OEIS):

- спектр числа трансверселей в ОДЛК (**1, 0, 0, 1, 1, 0, 4, 25, 295**);
- **A349199** (на подтверждении) — спектр числа диагональных трансверселей в ОДЛК (**1, 0, 0, 1, 1, 0, 3, 31, 165**);
- спектр числа интеркалятов в ОДЛК (**1, 0, 0, 1, 1, 0, 3, 26, 55**);
- спектр числа ОДЛК в ОДЛК (**1, 0, 0, 1, 1, 0, 2, 30, 98**).



Числовые ряды для $\sup S$ и $\inf S$

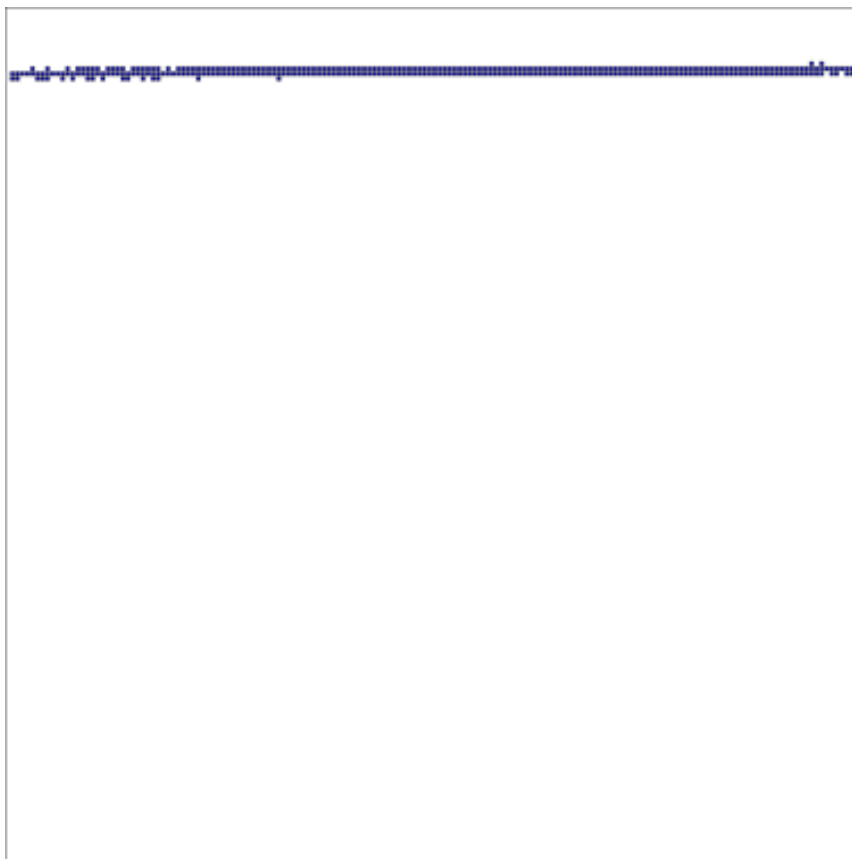
Числовые ряды для ОДЛК (планируются к добавлению в OEIS):

- минимальное число трансверселей в ОДЛК (**1, 0, 0, 8, 15, 0, 23, 16, 132**);
- минимальное число диагональных трансверселей в ОДЛК (**1, 0, 0, 4, 5, 0, 8, 8, 14**);
- минимальное число интеркалятов в ОДЛК (**0, 0, 0, 12, 0, 0, 0, 2, 0**);
- максимальное число интеркалятов в ОДЛК (**0, 0, 0, 12, 0, 0, 18, 112, 72**);
- минимальное число ОДЛК для ОДЛК (**1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1**).



Методы аппроксимации спектров порядков $N \geq 9$

- генерация ДЛК заданного типа (**случайные**, симметричные (в плоскости, **центрально симметричные**, дважды симметричные, обобщенно симметричные), частично симметричные, специального типа (SODLS/ESODLS/DSODLS, Browns), etc.) + вычисление выбранной числовой характеристики + формирование спектра



Случайные ДЛК порядка 12, спектр числа диагональных трансверселей

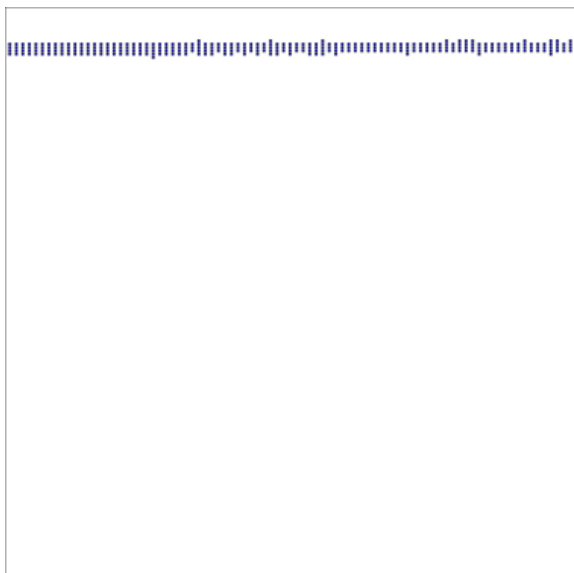


Центрально симметричные ОДЛК порядка 12, спектр числа диагональных трансверселей



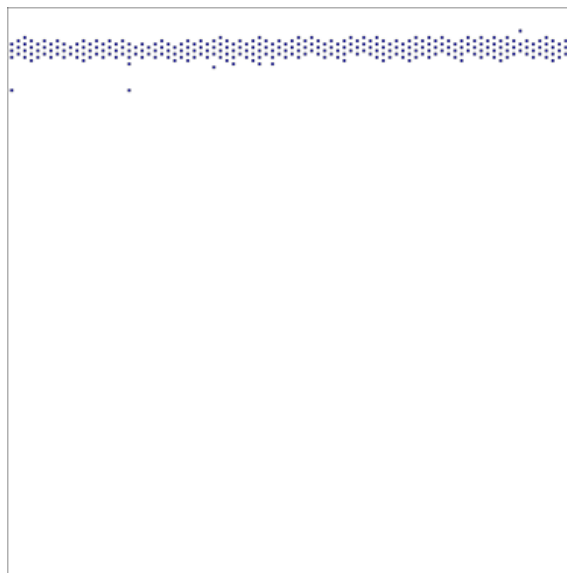
Методы аппроксимации спектров порядков $N \geq 9$

- генерация ДЛК заданного типа (случайные, симметричные (в плоскости, центрально симметричные, дважды симметричные, обобщенно симметричные), частично симметричные, специального типа (SODLS/ESODLS/DSODLS, Browns), etc.) + вычисление выбранной числовой характеристики + формирование спектра



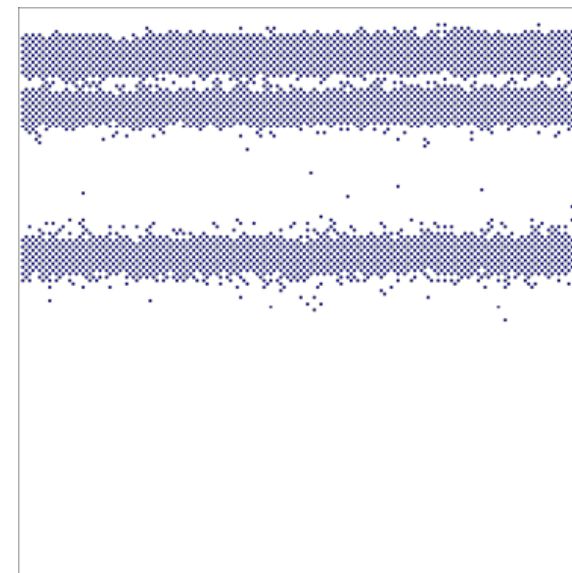
Случайные симметричные в одной плоскости ДЛК порядка 12, спектр числа диагональных трансверселей

2x



Случайные дважды симметричные ДЛК порядка 12, спектр числа диагональных трансверселей

4x

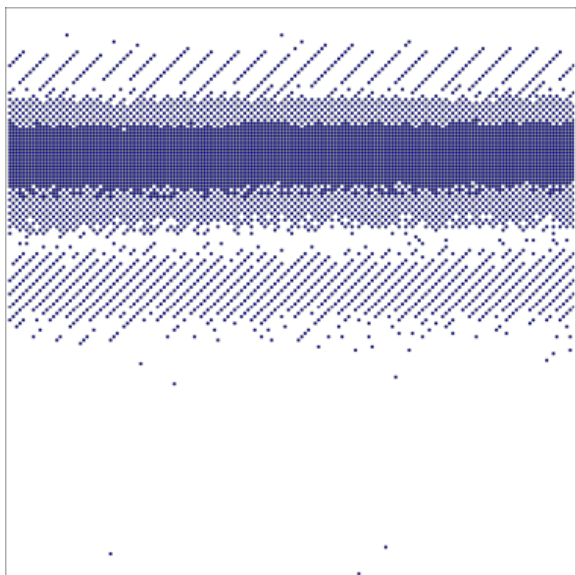


Случайные квадраты Брауна порядка 12, спектр числа диагональных трансверселей

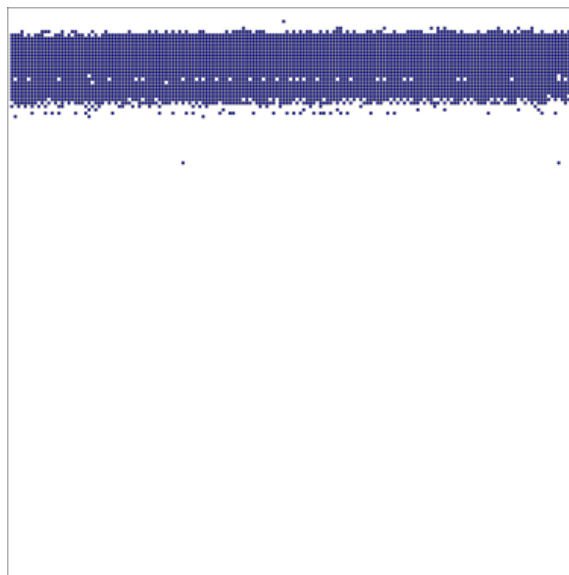


Методы аппроксимации спектров порядков $N \geq 9$

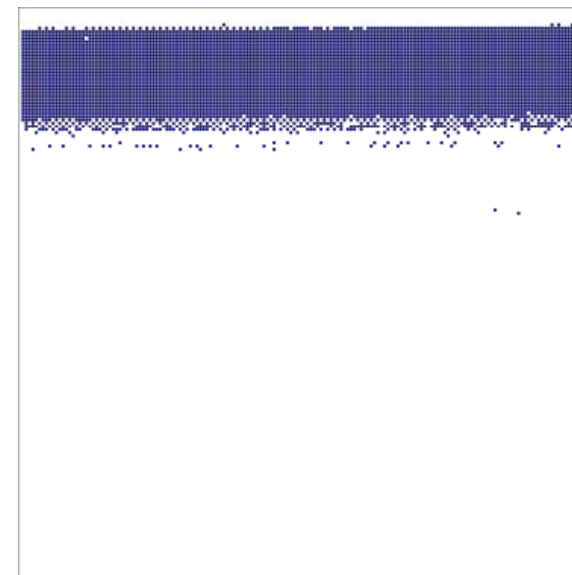
- расширение известного спектра путем анализа ДЛК из окрестностей, полученных путем вращения **1 интеркалята** или 1 цикла (для одного квадрата).



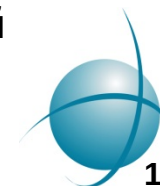
ДЛК порядка 12 с 28496
диагональными
трансверсальями, **вращение**
1 интеркалята, спектр
числа диагональных
трансверселей



ДЛК порядка 12 с 588
диагональными
трансверсальями, **вращение**
1 интеркалята, спектр
числа диагональных
трансверселей

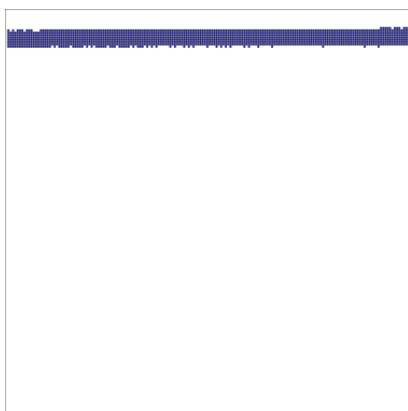


ДЛК порядка 12 с 252
интеркалятами, **вращение 1**
интеркалята, спектр числа
диагональных
трансверселей

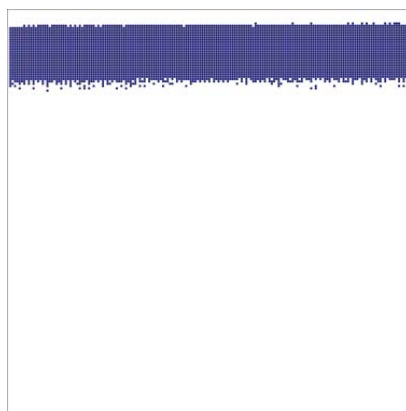
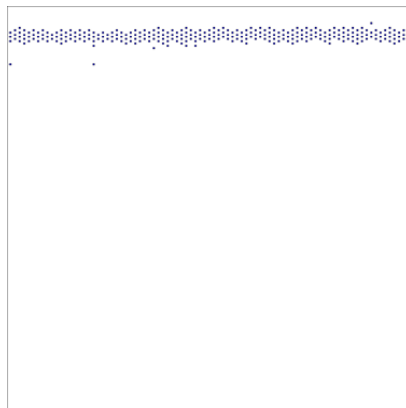


Методы аппроксимации спектров порядков $N \geq 9$

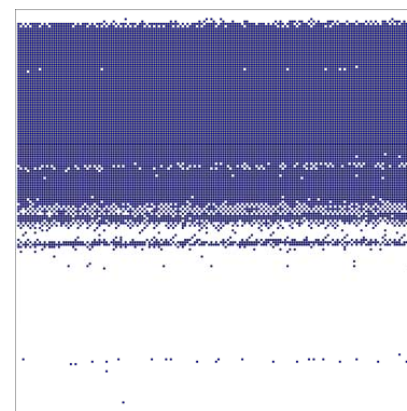
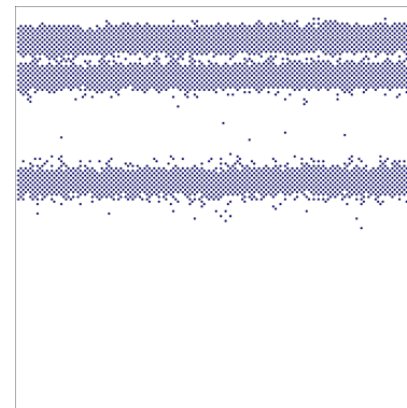
- расширение известного спектра путем анализа ДЛК из окрестностей, полученных путем вращения **1 интеркалята** или 1 цикла (для коллекции квадратов).



500 тыс.
симметричных ДЛК,
вращение 1
интеркалята, спектр
числа диагональных
трансверселей



11 тыс. дважды
симметричных ДЛК,
вращение 1
интеркалята, спектр
числа диагональных
трансверселей



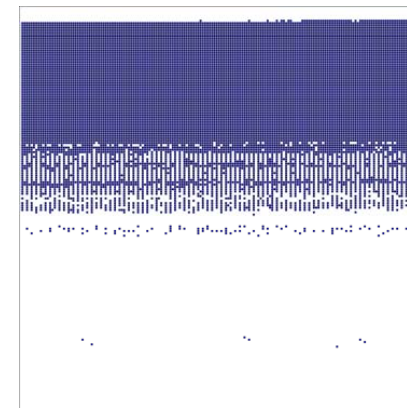
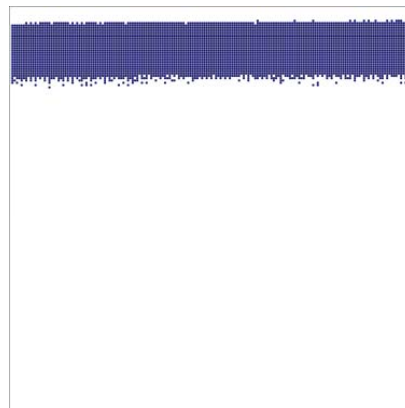
600 тыс. ДЛК Брауна,
вращение 1
интеркалята, спектр
числа диагональных
трансверселей



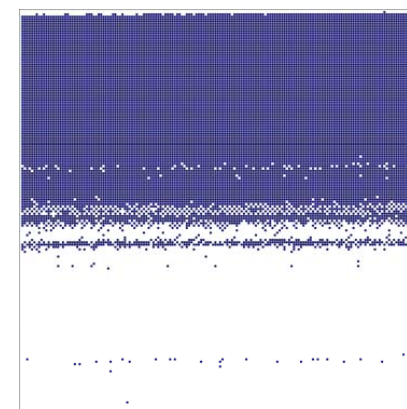
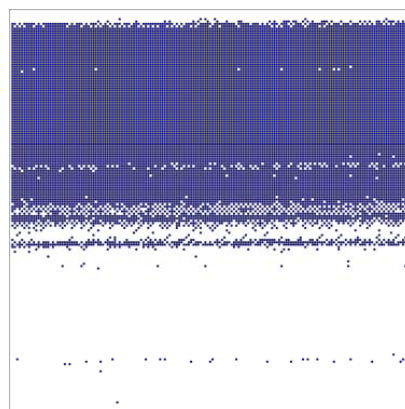
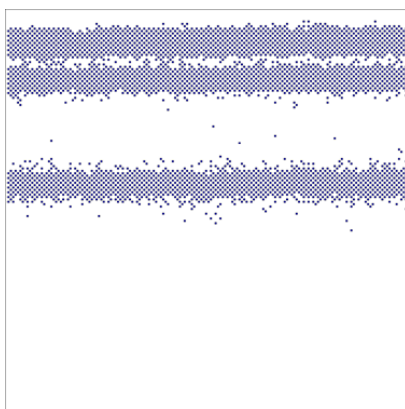
Методы аппроксимации спектров порядков $N \geq 9$

- расширение известного спектра путем анализа ДЛК из окрестностей, полученных путем вращения **1 интеркалята** или **1 цикла** (для коллекции квадратов).

11 тыс. дважды
симметричных ДЛК
порядка 12



600 тыс. ДЛК Брауна
порядка 12



Вращение 1
интеркалята, спектр
числа диагональных
трансверселей

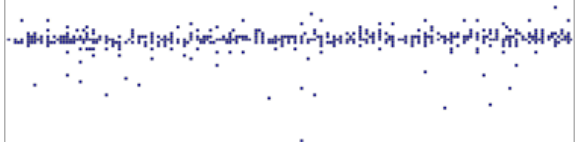
Вращение 1 цикла,
спектр числа
диагональных
трансверселей



Методы аппроксимации спектров порядков $N \geq 9$

- диагонализация заданного ДЛК (с большим числом трансверселей).

ДЛК порядка 12 с
198144
трансверселями



ДЛК порядка 12 с
132096
трансверселями



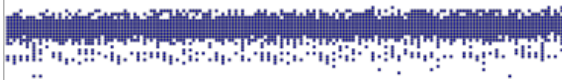
ДЛК порядка 12 с
122880
трансверселями



ДЛК порядка 12 с
120832
трансверселями



ДЛК порядка 12 с
119296
трансверселями

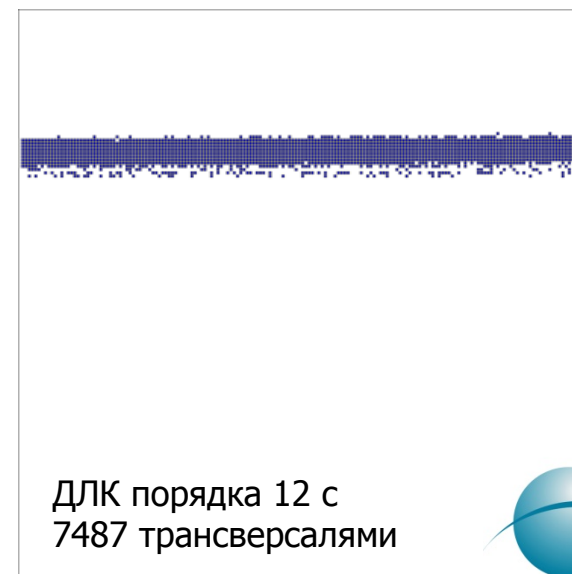
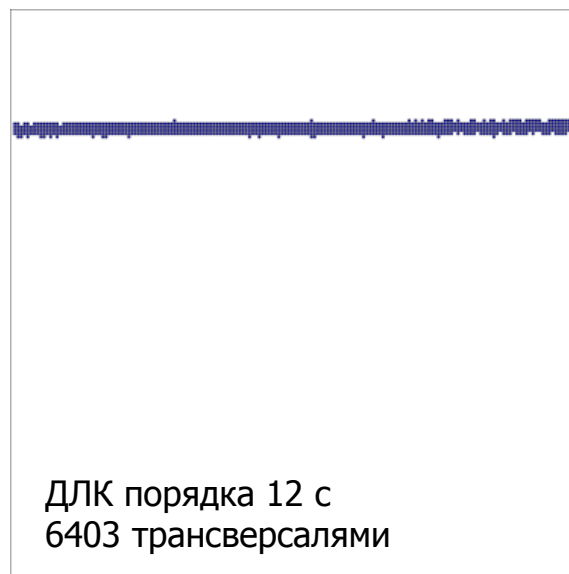
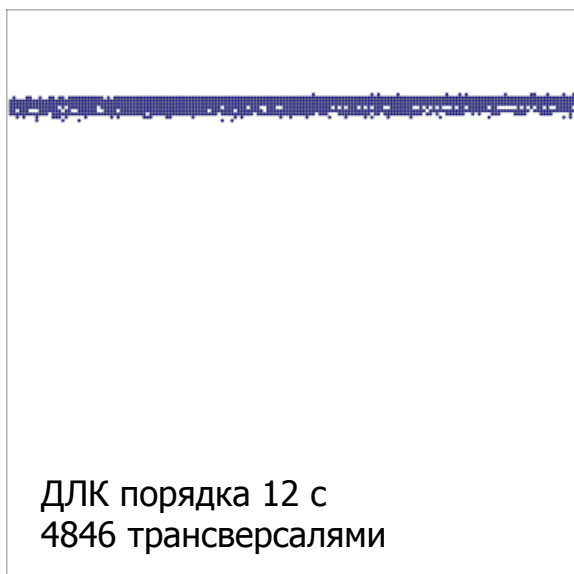
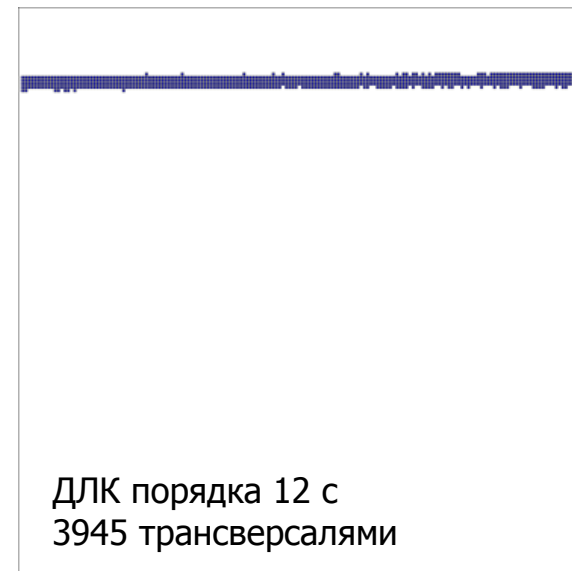
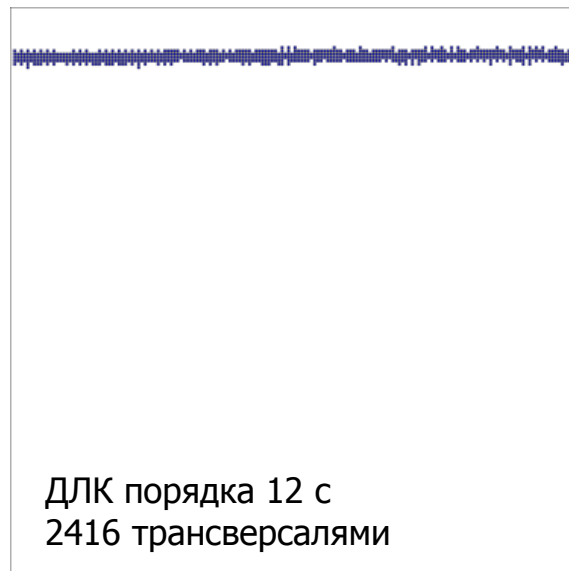
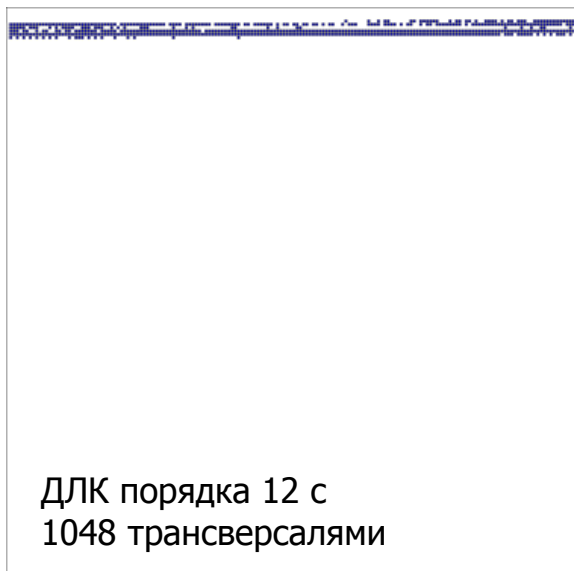


ДЛК порядка 12 с
117760
трансверселями



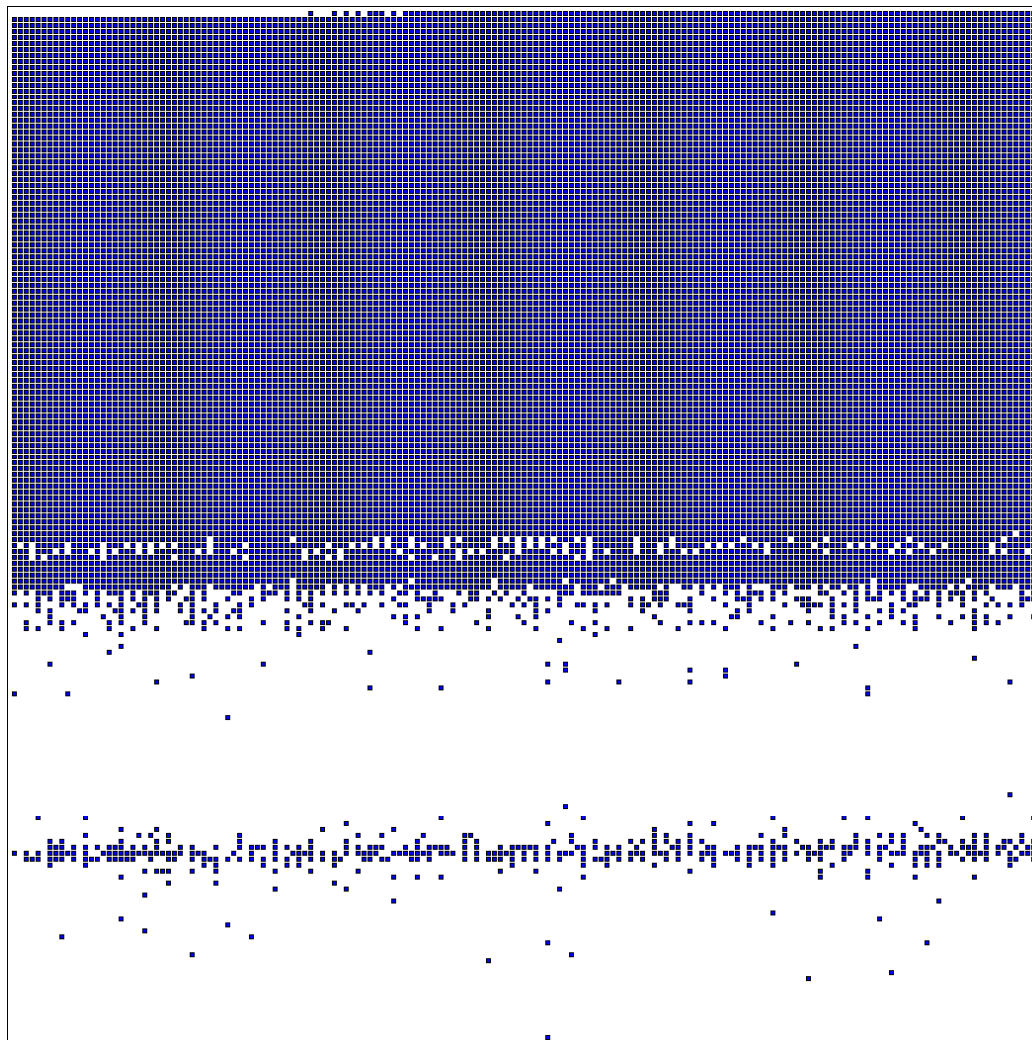
Методы аппроксимации спектров порядков $N \geq 9$

- диагонализация заданного ДЛК (с малым числом трансверселей).



Методы аппроксимации спектров порядков $N \geq 9$

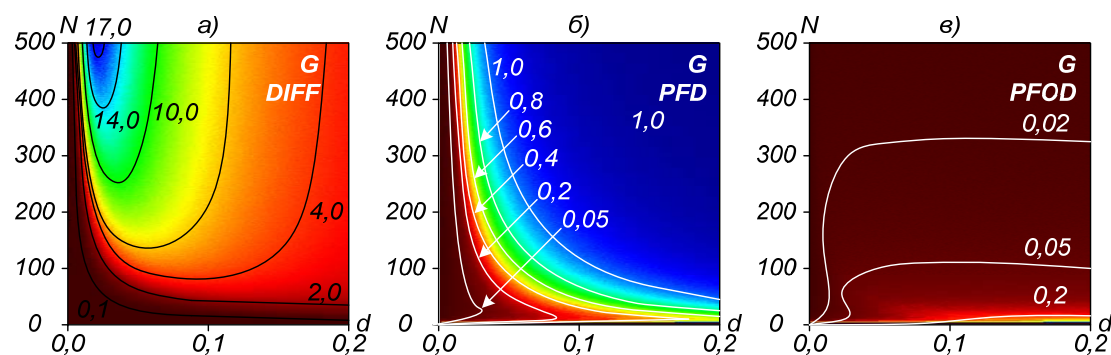
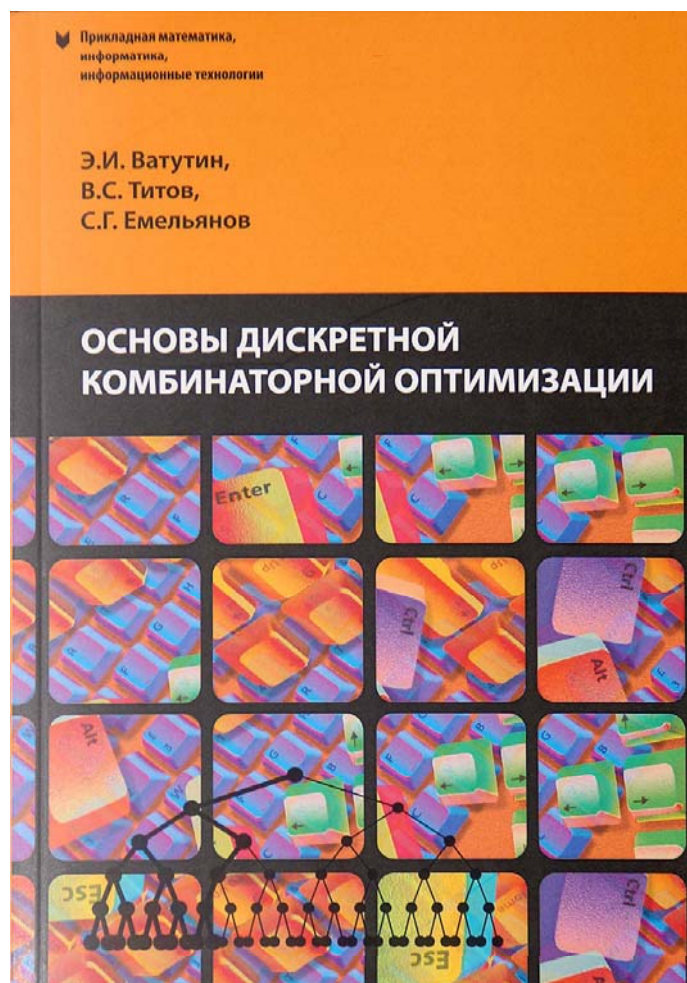
- комбинация рассмотренных выше методов.



Спектр числа диагональных трансверселей в ДЛК
порядка 12, 17641 элемент

Методы аппроксимации спектров порядков $N \geq 9$

- перспектива дальнейших исследований — движение в пространстве ДЛК путем применения к ним простых преобразований (G, RW, WRS, BC, SA, PSO, GA?, etc).



Анализ эффективности жадного метода (G) в задаче поиска кратчайшего пути в графе (SSP)

Vatutin E., Panishchev V., Gvozdeva S., Titov V. Comparison of Decisions Quality of Heuristic Methods Based on Modifying Operations in the Graph Shortest Path Problem // Problems of Information Technology. No. 1. 2020. pp. 3–15. DOI: 10.25045/jpit.v11.i1.01.

Ватутин Э.И., Титов В.С., Емельянов С.Г. Основы дискретной комбинаторной оптимизации. М.: АРГАМАК-МЕДИА, 2016. 270 с. ISBN 978-5-00024-057-1.





Аппроксимация спектров порядков $N \geq 9$

Число трансверсалей в ДЛК (**A344105**):

$$a(9) \geq 359, a(10) \geq 442, a(11) \geq 1158, a(12) \geq 22407$$

Число диагональных трансверсалей в ДЛК (**A345370**):

$$a(9) \geq 176, a(10) \geq 736, a(11) \geq 353, a(12) \geq 17641$$

Число интеркалятов в ДЛК (**A345760**):

$$a(9) \geq 62, a(10) \geq 88, a(11) \geq 100, a(12) \geq 210$$

Число ОДЛК в ДЛК (**A345761**):

$$a(10) \geq 10, a(11) \geq 36, a(12) \geq 2782$$

Спектры близки к пределу

Спектры допускают расширение, соответствующие вычислительные эксперименты выполняются или запланированы к выполнению





Усиление известных верхних/нижних границ с использованием алгоритмов построения спектров

Минимальное число трансверсалей в ДЛК (**A287645**):

$$a(10) \leq 144, a(11) \leq 2091, a(12) \leq 1312$$

Максимальное число трансверсалей в ДЛК (**A287644**):

$$a(12) \geq 198144$$

Минимальное число диагональных трансверсалей в ДЛК (**A287647**):

$$a(10) \leq 3, a(11) \leq 199, a(12) \leq 50$$

Максимальное число диагональных трансверсалей в ДЛК (**A287648**):

$$a(10) \geq 890$$

Максимальное число интеркалятов в ДЛК (**A307164**):

$$a(12) \geq 252$$

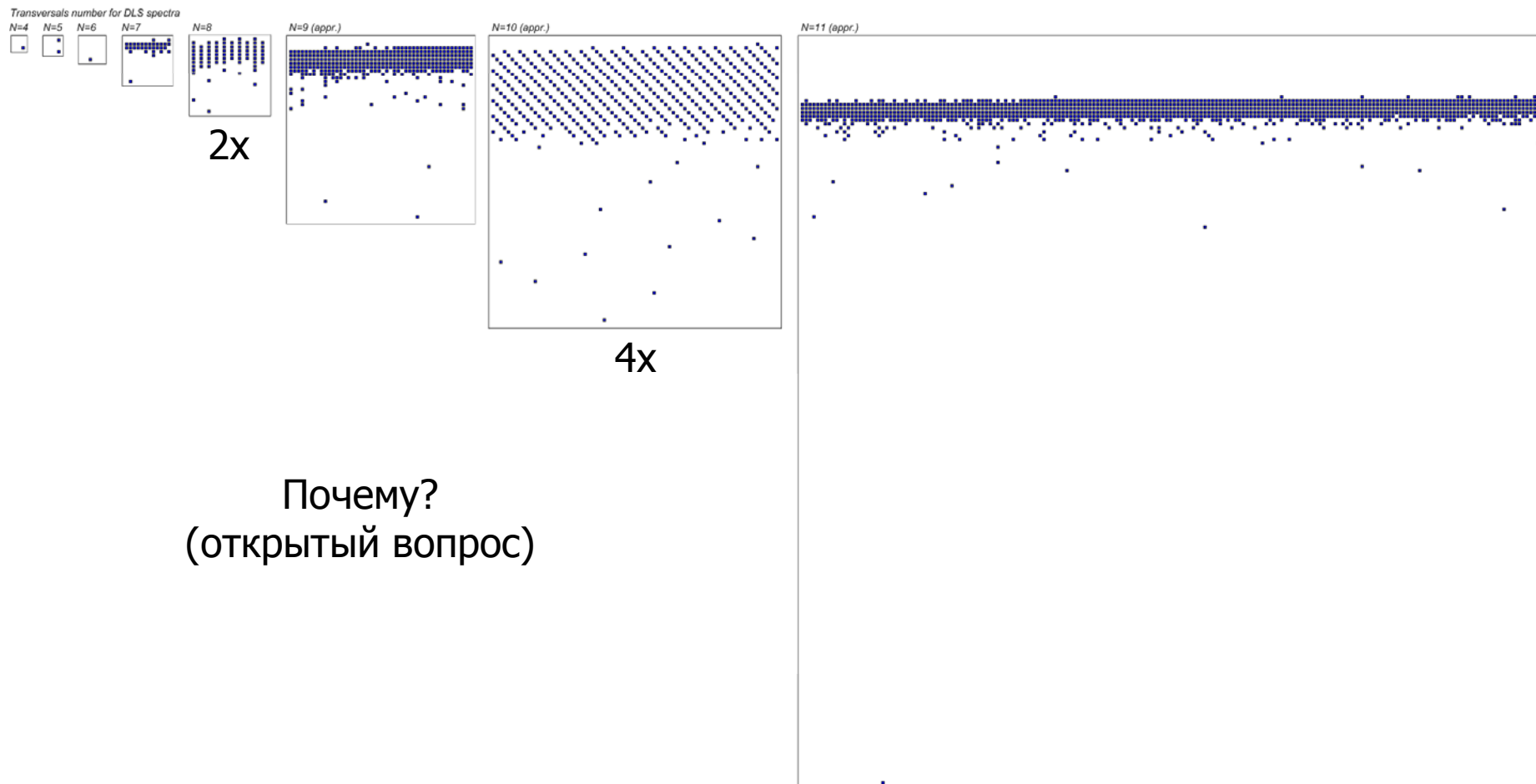
Максимальное число ОДЛК в ДЛК (**A287695**):

$$a(12) \geq 3855983322$$

SEU errors ☹
~1 месяц
счета на грид!

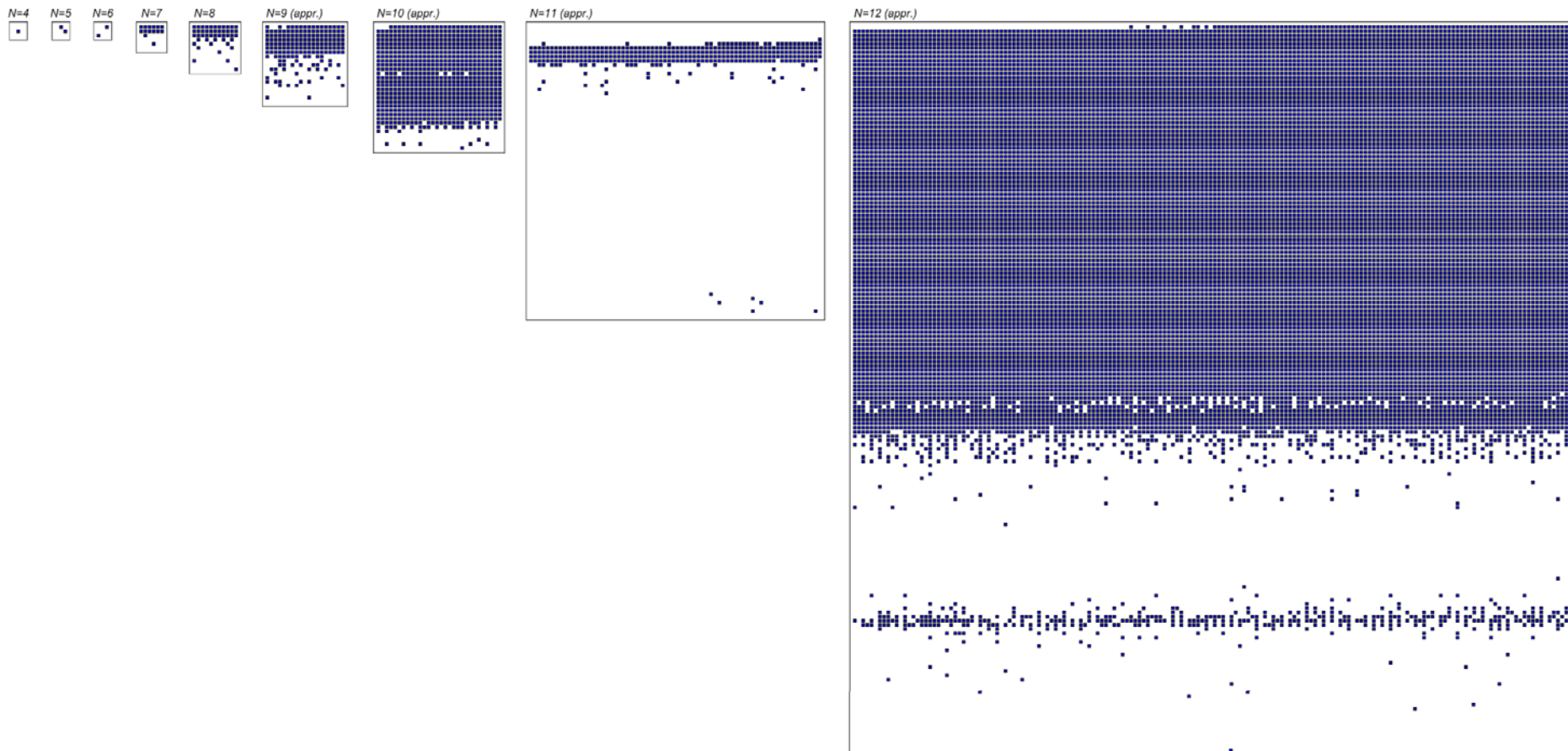


Графическое представление спектров: число трансверселей в ДЛК



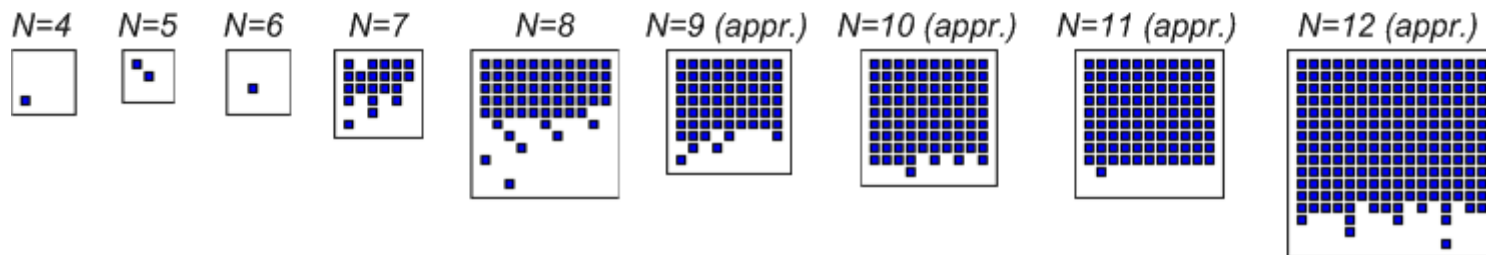
Графическое представление спектров: число диагональных трансверселей в ДЛК

Diagonal transversals number for DLS spectra

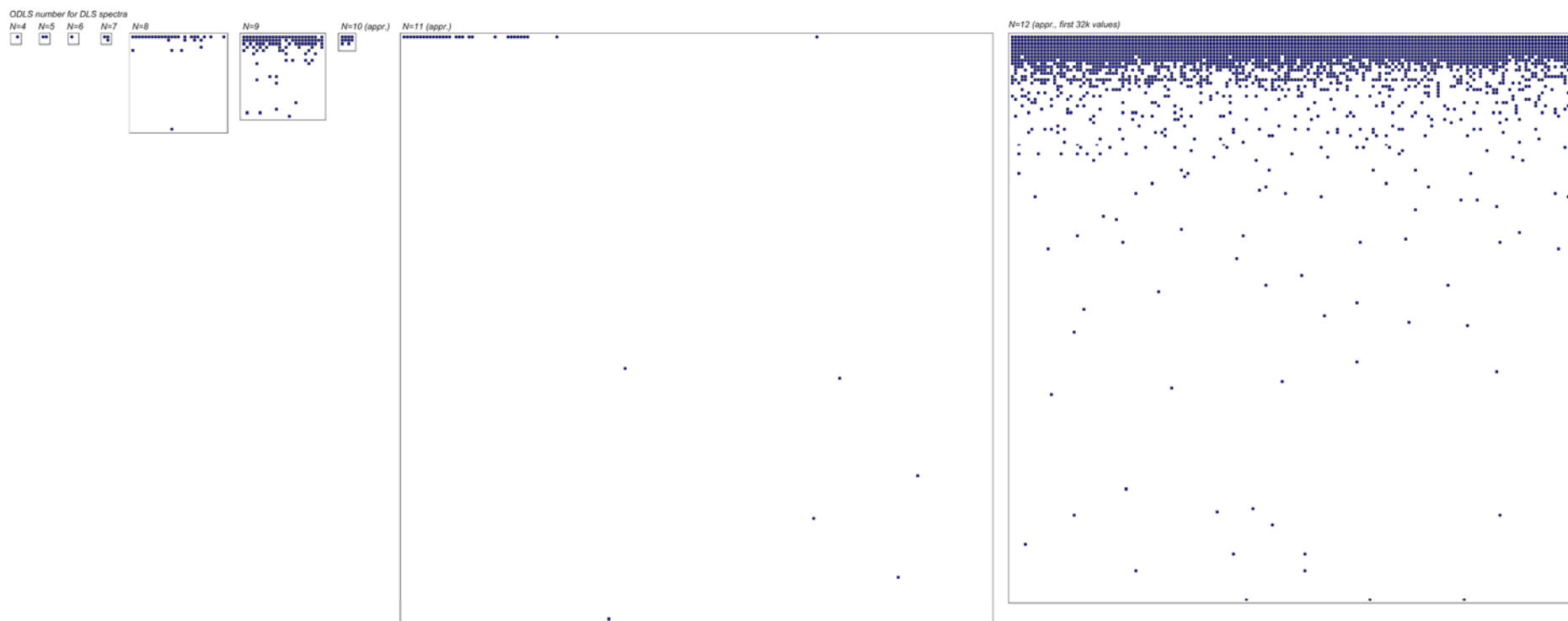


Графическое представление спектров: число интеркалятов в ДЛК

Intercalates number for DLS spectra



Графическое представление спектров: число ОДЛК в ДЛК



Расчет в настоящее время
выполняется в проектах
Gerasim@home и RakeSearch + 2
потока без грид
<https://gerasim.boinc.ru>
<https://rake.boincfast.ru/rakesearch/>

http://evatutin.narod.ru/spectra/spectra_dls_odls_all.png





Спасибо за внимание!

Выражаем благодарность всем добровольцам,
принимаящим участие в проектах добровольных
распределенных вычислений Gerasim@home и
RakeSearch!

WWW: <http://evatutin.narod.ru>, <https://gerasim.boinc.ru>,
<https://rake.boincfast.ru/rakesearch/>

E-mail: evatutin@rambler.ru

