

Юго-Западный государственный университет
Кафедра вычислительной техники

О ЧИСЛЕ ТРАНСВЕРСАЛЕЙ В ДИАГОНАЛЬНЫХ ЛАТИНСКИХ КВАДРАТАХ ЧЕТНЫХ ПОРЯДКОВ

Ватулин Э.И., Никитина Н.Н., Манзюк М.О., Курочкин И.И.,
Альбертьян А.М.

Переславль-Залесский, 2023



Понятие ЛК и ДЛК

$$A = \| \| a_{ij} \| \|$$

$$i, j = \overline{1, N}$$

$$N = |S|$$

$$S = \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$$

$$\forall i, j, k = \overline{1, N}, j \neq k : (a_{ij} \neq a_{ik}) \wedge (a_{ji} \neq a_{ki})$$

$$\forall i, j = \overline{1, N}, i \neq j : (a_{ii} \neq a_{jj}) \wedge (a_{N-i+1, N-i+1} \neq a_{N-j+1, N-j+1})$$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	9	4	3	6	7	5	0	8
2	9	3	1	7	0	5	8	4	6
3	4	1	2	8	7	9	6	5	0
4	3	5	9	2	1	8	0	6	7
5	6	4	8	1	2	0	9	7	3
6	5	8	7	0	3	2	1	9	4
7	8	6	0	9	4	1	2	3	5
8	7	0	5	6	9	3	4	1	2
9	0	7	6	5	8	4	3	2	1

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
7	2	4	9	0	6	5	1	3	8
8	3	6	7	5	9	0	2	4	1
2	6	8	5	1	7	4	0	9	3
5	8	9	1	7	0	3	4	6	2
9	4	1	2	8	3	7	6	0	5
4	7	5	6	9	1	8	3	2	0
3	0	7	8	2	4	1	9	5	6
6	5	0	4	3	2	9	8	1	7
1	9	3	0	6	8	2	5	7	4

Нормализованный ЛК порядка 10 Нормализованный ДЛК порядка 10

$$N! \times (N-1)!$$

$$(N-1)!$$



Числовые характеристики ЛК/ДЛК

Быстровычисляемые:

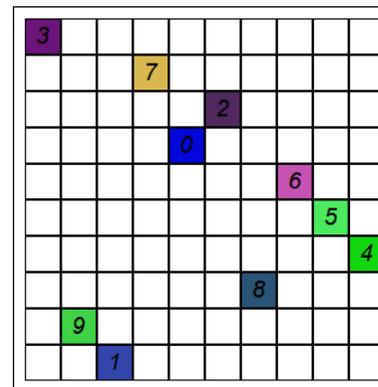
- число интеркалятов;
- число (диагональных) трансверсалей;

Относительно быстровычисляемые:

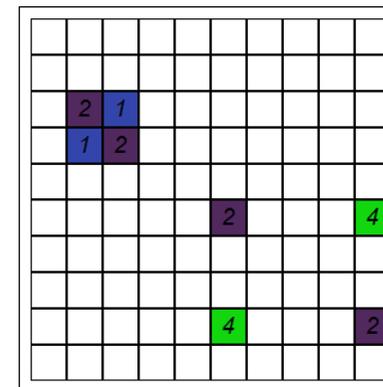
- число ОЛК/ОДЛК.

Не быстровычисляемые:

- число полных/частичных циклов;
- число тривиальных/нетривиальных латинских подпрямоугольников;
- мощность главного класса;
- ...



Пример
трансверсали



Пример
интеркалятов



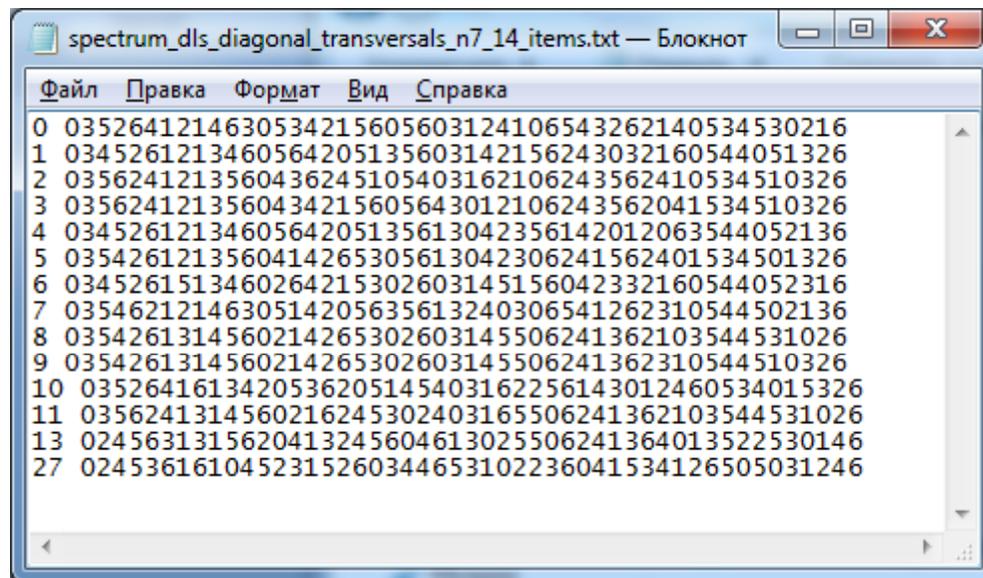
Понятие спектров числовых характеристик

Спектр S — множество числовых значений выбранной числовой характеристики X комбинаторных объектов заданного типа.

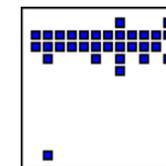
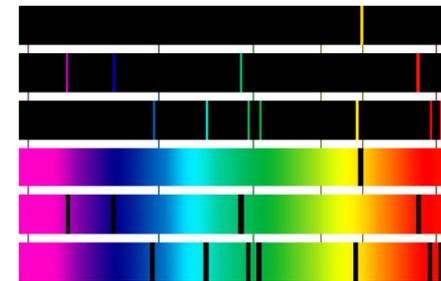
Пример:

- тип комбинаторных объектов — ДЛК порядка 7;
- числовая характеристика — число диагональных трансверселей.

$$S_{dt, DLS7} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 27\}$$



```
spectrum_dls_diagonal_transversals_n7_14_items.txt — Блокнот
Файл  Правка  Формат  Вид  Справка
0 0352641214630534215605603124106543262140534530216
1 0345261213460564205135603142156243032160544051326
2 0356241213560436245105403162106243562410534510326
3 0356241213560434215605643012106243562041534510326
4 0345261213460564205135613042356142012063544052136
5 0354261213560414265305613042306241562401534501326
6 0345261513460264215302603145156042332160544052316
7 0354621214630514205635613240306541262310544502136
8 0354261314560214265302603145506241362103544531026
9 0354261314560214265302603145506241362310544510326
10 0352641613420536205145403162256143012460534015326
11 0356241314560216245302403165506241362103544531026
13 0245631315620413245604613025506241364013522530146
27 0245361610452315260344653102236041534126505031246
```



http://evatutin.narod.ru/spectra/spectrum_dls_diagonal_transversals_n7_14_items.txt

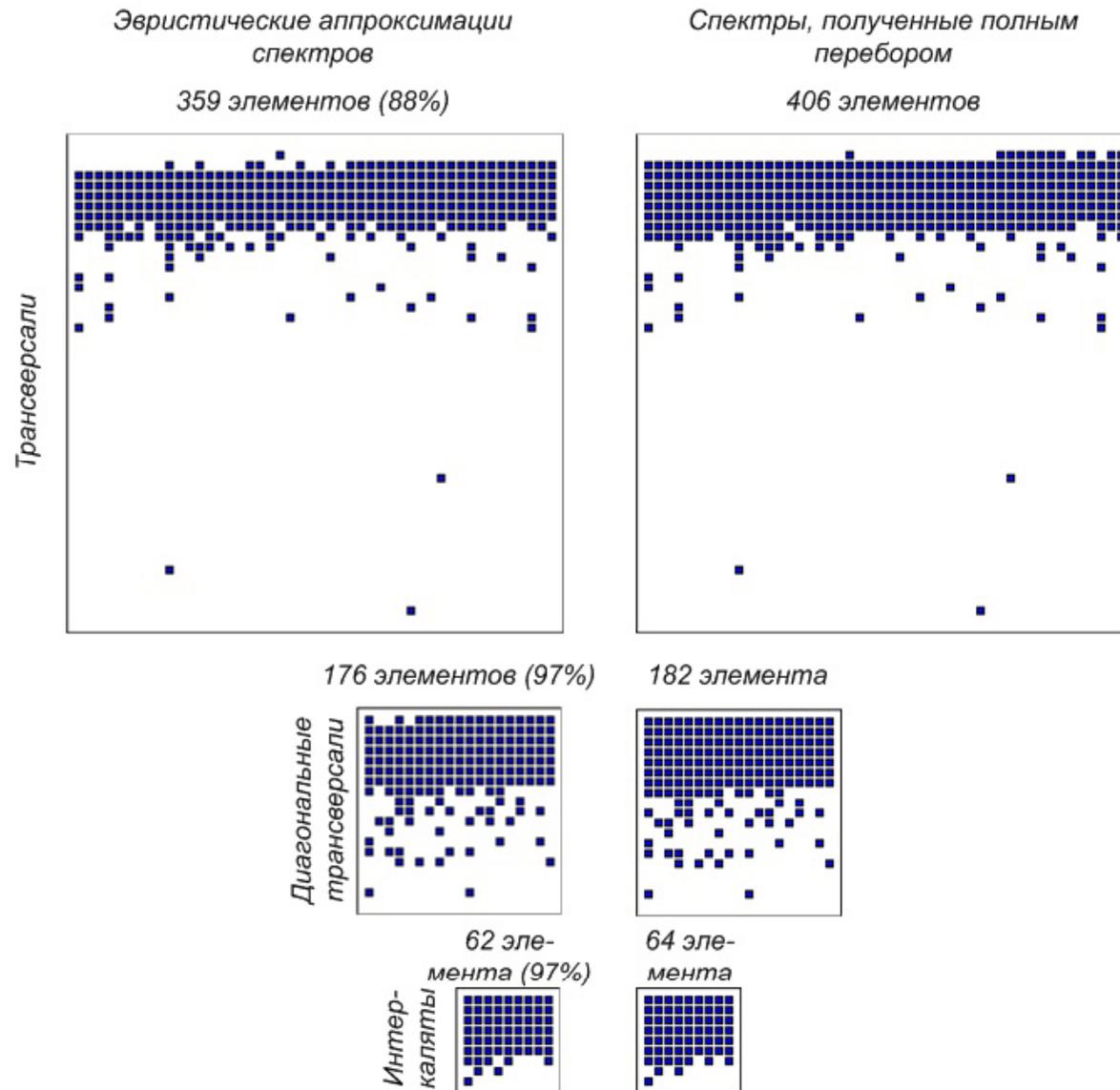
Построение спектров полным перебором

Порядок ДЛК	1	4	5	6	7	8	9
Трансверсали	BF						
Диагональные трансверсали	BF						
Интеркаляты	BF						
ОДЛК	BF						

- вычислительный эксперимент для порядка $N=9$ потребовал 5 месяцев расчета на грид (Gerasim@Home + RakeSearch) при реальной производительности проектов порядка 7—8 TFLOP/s и параллельно работающих подпроектах



Оценка эффективности эвристических методов аппроксимации на примере спектров порядка $N=9$





Общая стратегия эвристического построения спектров

- формирование опорного спектра;
- расширение опорного спектра.

Опорные спектры:

- от ДЛК другого спектра (например, построение спектра трансверселей по спектру диагональных трансверселей);
- от ДЛК какого-либо специального типа (ДЛК Брауна, Гергели, (полу)циклические ДЛК, ...).

Методы расширения спектров:

- анализ окрестностей от поворота 1 интеркалята/цикла;
- диагонализация.



Методы расширения спектров

Обход окрестностей (сокр. M1)

- замыкание спектра, распараллеливание по обрабатываемым квадратам спектра

Обход окрестностей поквратно (сокр. M2)

- отдельное замыкание спектров отталкиваясь от квадратов исходного спектра, только для малых порядков ($N < 13$)

Диагонализация (сокр. d)

- полная (по всем квадратам спектра), только для малых порядков ($N < 14$)
- частичная (эвристически) – в перспективе для порядков $N = 14$ и больше

Методы на базе движения в пространстве квадратов (в перспективе для порядков $N > 15-16$, для которых построение полных спектров затруднительно)

- жадное движение «вниз» или «вверх»
- случайные блуждания
- взвешенные случайные блуждания
- и др. методы дискретной комбинаторной оптимизации



Построение спектров: M1

НСКФ 2022

Порядок ДЛК	1	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Трансверсали	BF	M1	M1	M1	M1	To Do	To Do	x						
Диагональные трансверсали	BF	M1	M1	M1	M1	M1	M1	x						
Интеркаляты	BF	M1	M1	M1	M1	To Do	To Do	...						
ОДЛК	BF	s	s	s	To Do	x?	x?							

НСКФ 2023

Порядок ДЛК	1	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Трансверсали	BF	M1	M1	M1	M1	M1*	To Do	x						
Диагональные трансверсали	BF	M1	M1	M1	M1	M1	M1	x						
Интеркаляты	BF	M1	M1	M1	M1	M1	To Do	...						
ОДЛК	BF	s	s	s	To Do	x?	x?							



Построение спектров: M2

НСКФ 2022

Порядок ДЛК	1	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Трансверсали	BF	M2	M2	M2	M1	To Do	To Do	x						
Диагональные трансверсали	BF	M2	M2	M2	M2	M1	M1	x						
Интеркаляты	BF	M2	M2	M2	M2	To Do	To Do	...						
ОДЛК	BF	s	s	s	To Do	x?	x?							

НСКФ 2023

Порядок ДЛК	1	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Трансверсали	BF	M2	M2	M2	x	M1 *	x	x						
Диагональные трансверсали	BF	M2	M2	M2	M2	x	x	x						
Интеркаляты	BF	M2	M2	M2	M2	M2	To Do	...						
ОДЛК	BF	s	s	s	To Do	x	x							



Более детальное представление экспериментов

Порядок ДПК	1	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Трансверсали	BF	M2	M2	M2	M1	To Do	To Do	x						
Диагональные трансверсали	BF	M2	M2	M2	M2	M1	M1	x						
Интеркаляты	BF	M2	M2	M2	M2	To Do	To Do	...						
ОДПК	BF	s	s	s	To Do	x?	x?							



Построение спектров: диагонализация

НСКФ 2022

Порядок ДЛК	1	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Трансверсали	BF	M2	M2	M2	M1	To Do	To Do	x						
Диагональные трансверсали	BF	d	d	d	To Do	To Do	To Do	x						
Интеркаляты	BF	M2	M2	M2	M2	To Do	To Do	...						
ОДЛК	BF	s	s	s	To Do	x?	x?							

НСКФ 2023

Порядок ДЛК	1	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Трансверсали	BF	M2	M2	M2	M1	M1 *	To Do	x						
Диагональные трансверсали	BF	d	d	d	d	x?	x?	x						
Интеркаляты	BF	M2	M2	M2	M2	M2	To Do	...						
ОДЛК	BF	s	s	s	To Do	x?	x?							



Новые результаты (НСКФ'21 → НСКФ'22 → НСКФ'23)

Мощности аппроксимаций спектров ДЛК:

• трансверсали в ДЛК:

- $a(9) \geq 359 \rightarrow a(9) = 406 \rightarrow a(9) = 406,$ (2022)
- $? \rightarrow a(10) \geq 442 \rightarrow a(10) \geq 442,$ (2022)
- $a(11) \geq 1158 \rightarrow a(11) \geq 5081 \rightarrow a(11) \geq 5081,$ (2022)
- $a(12) \geq 22407 \rightarrow a(12) \geq 23113 \rightarrow a(12) \geq 23113,$ (2022)
- $? \rightarrow a(13) \geq 74315 \rightarrow a(13) \geq 75891,$ (2023)
- $? \rightarrow ? \rightarrow a(14) \geq 281825$ (2023)

• диагональные трансверсали в ДЛК:

- $a(9) \geq 176 \rightarrow a(9) = 182 \rightarrow a(9) = 182,$ (2022)
- $? \rightarrow a(10) \geq 736 \rightarrow a(10) \geq 736,$ (2022)
- $a(11) \geq 353 \rightarrow a(11) \geq 1242 \rightarrow a(11) \geq 1242,$ (2022)
- $a(12) \geq 17641 \rightarrow a(12) \geq 17693 \rightarrow a(12) \geq 17693,$ (2022)
- $? \rightarrow a(13) \geq 12050 \rightarrow a(13) \geq 18241,$ (2023)
- $? \rightarrow a(14) \geq 281067 \rightarrow a(14) \geq 294053,$ (2023)
- $? \rightarrow a(15) \geq 1958394 \rightarrow a(15) \geq 1958394$ (2022)



Новые результаты (НСКФ'21 → НСКФ'22 → НСКФ'23)

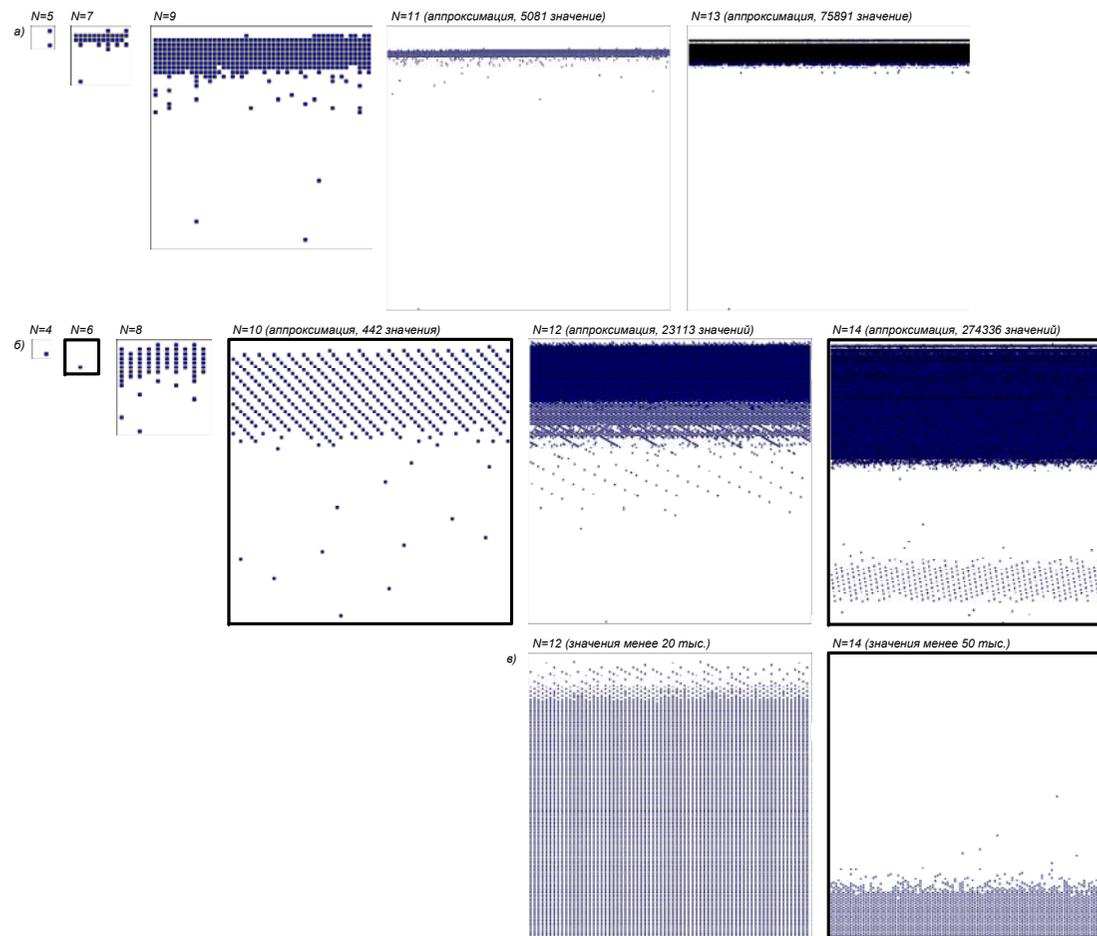
Мощности аппроксимаций спектров ДЛК:

- интеркаляты в ДЛК:
 - $a(9) \geq 62 \rightarrow a(9) = 64 \rightarrow a(9) = 64,$ (2022)
 - $? \rightarrow a(10) \geq 88 \rightarrow a(10) \geq 93,$ (2023)
 - $? \rightarrow a(11) \geq 100 \rightarrow a(11) \geq 101,$ (2023)
 - $? \rightarrow a(12) \geq 210 \rightarrow a(12) \geq 210,$ (2021)
 - $? \rightarrow a(13) \geq 152 \rightarrow a(13) \geq 152,$ (2022)
 - $? \rightarrow ? \rightarrow a(14) \geq 337$ (2023)
 - $? \rightarrow ? \rightarrow a(15) \geq 18$ слабые
 - $? \rightarrow ? \rightarrow a(16) \geq 11$ оценки...
 - $? \rightarrow ? \rightarrow a(17) \geq 7$
 - $? \rightarrow ? \rightarrow a(19) \geq 15$
- число ОДЛК в ДЛК:
 - $a(10) \geq 10 \rightarrow a(10) \geq 10 \rightarrow a(10) \geq 10,$ (2021)
 - $a(11) \geq 36 \rightarrow a(11) \geq 39 \rightarrow a(11) \geq 112,$ (2023)
 - $a(12) \geq 2782 \rightarrow a(12) \geq 4930 \rightarrow a(12) \geq 5522$ (2023)

Приведенным мощностям спектров соответствует ряд новых sup/inf оценок

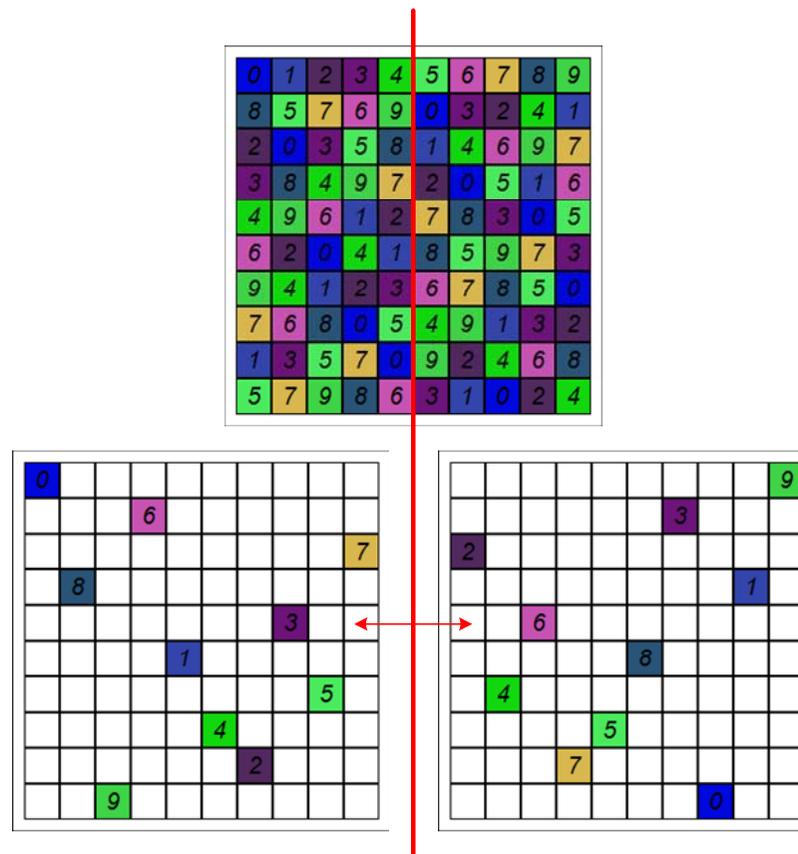


Графическое представление спектров трансверселей



- спектры ДЛК нечетного порядка особых особенностей не имеют (есть особенности в некоторых других частях некоторых спектров!)
- все значения во всех спектрах четных порядков $N=2k$ четны!
- все значения во всех спектрах четных порядков $N=4k+2$ кратны четырем!
- теоретическое объяснение? (подобный вывод очевиден для симметричных в одной/двух плоскостях ДЛК, но не очевиден для ДЛК общего вида...)

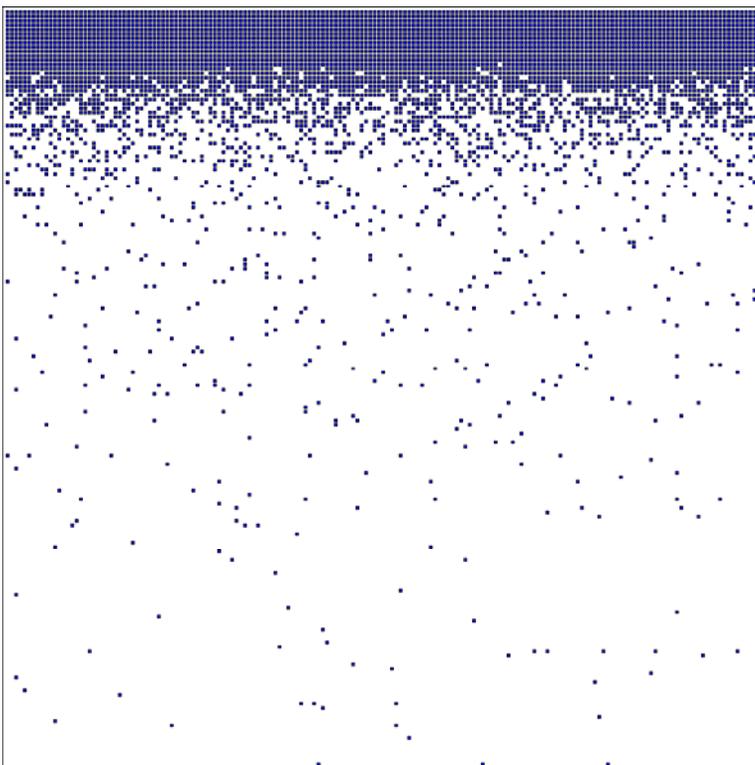
Плоскостные симметрии в ДЛК



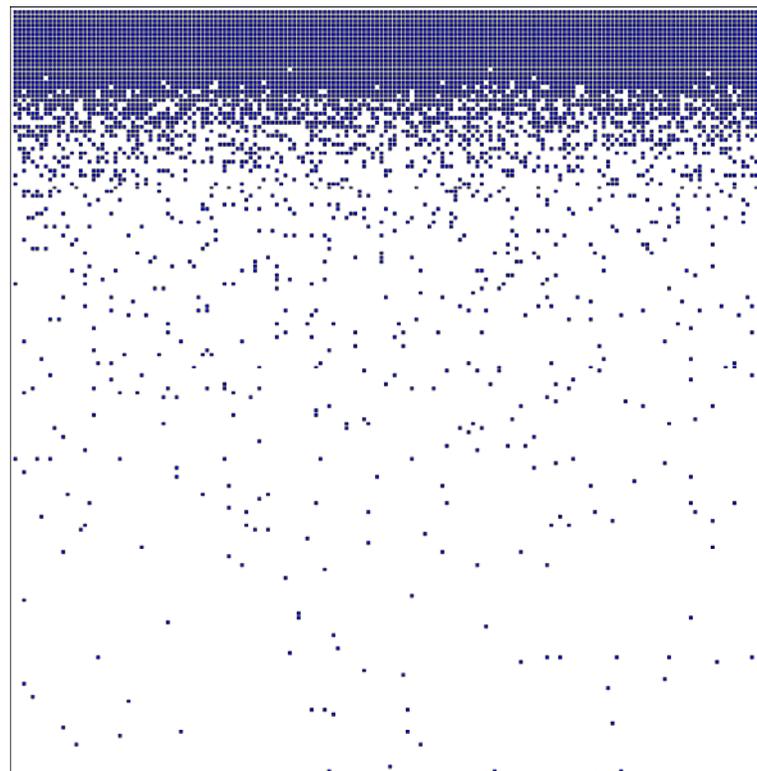
- у любого симметричного в одной плоскости ДЛК любая трансверсаль имеет симметричную себе (автоморфной симметричности трансверсалей быть не может, в отличие, например, от интеркалятов), соответственно число трансверсалей **кратно 2**;
- у любого симметричного в двух плоскостях ДЛК любая трансверсаль имеет еще 3 симметричных себе, соответственно число трансверсалей **кратно 4**;
- для ДЛК общего вида причина кратности 2 или 4 числа трансверсалей неочевидна...



Аппроксимация спектра числа ОДЛК в ДЛК порядка 12



Младшая часть спектра
(НСКФ'22, 4897 элементов)

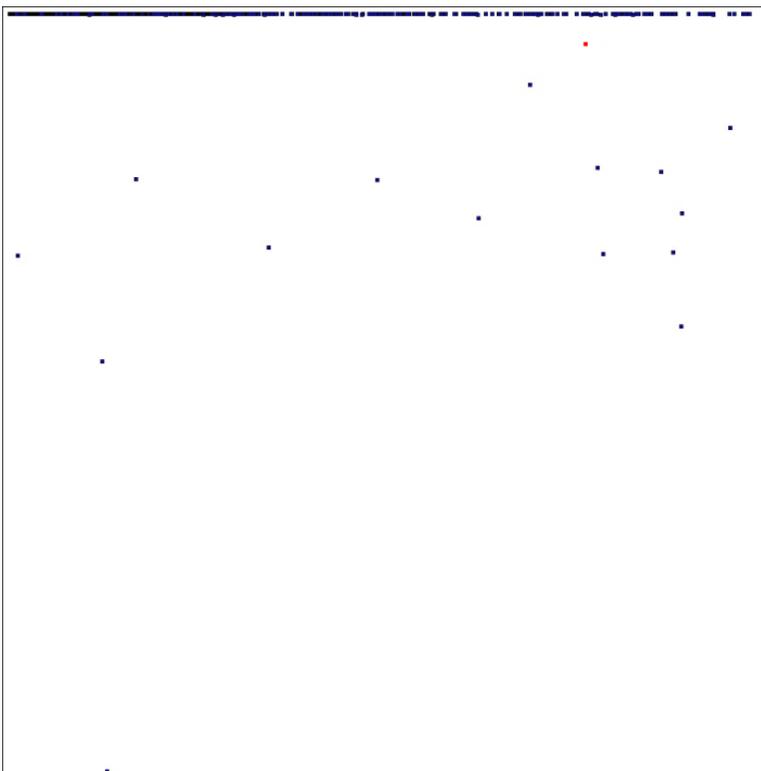


Младшая часть спектра
(НСКФ'23, 5522 элемента)

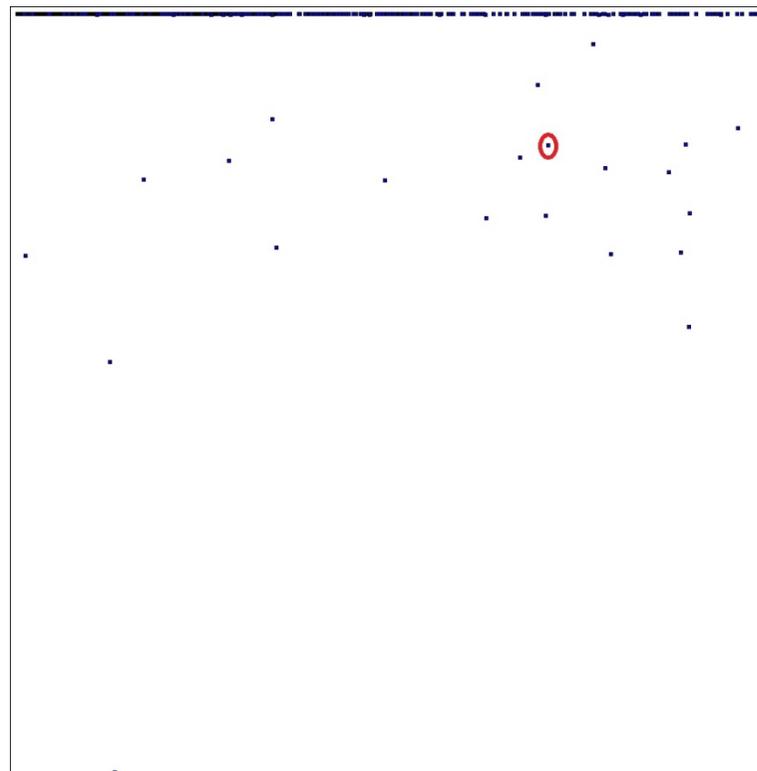
- построение младшей части производится в 1 поток на Core i7 4770;
- построение старшей части производится поквратно в проекте RakeSearch для ДЛК с большим числом диагональных трансверселей;
- <http://evatutin.narod.ru/spectra/spectrum dls odls n12 xxxx known items.txt>



Аппроксимация спектра числа ОДЛК в ДЛК порядка 12



Спектр целиком
(НСКФ'22, 4897 элементов)



Спектр целиком
(НСКФ'23, 5522 элемента)

- построение младшей части производится в 1 поток на Core i7 4770;
- построение старшей части производится поквратно в проекте RakeSearch для ДЛК с большим числом диагональных трансверсалей;
- http://evatutin.narod.ru/spectra/spectrum_dls_odls_n12_xxxx_known_items.txt





Дополнительные эксперименты

Если у меня есть 5 минут...



Поиск ОДЛК порядка 10 в окрестностях обобщенных симметрий

6 парастрофических срезов:

- 1-й срез — **обработан полностью**;
- 2-й срез — **обработан полностью**;
- 3-й срез — **обработан полностью**;
- 4-й срез — **обрабатывается** (обсчитано 36 строк из 42, 86%);
- 5-й срез — **планируется к обработке**;
- 6-й срез — **планируется к обработке**.

Стратегия обработки:

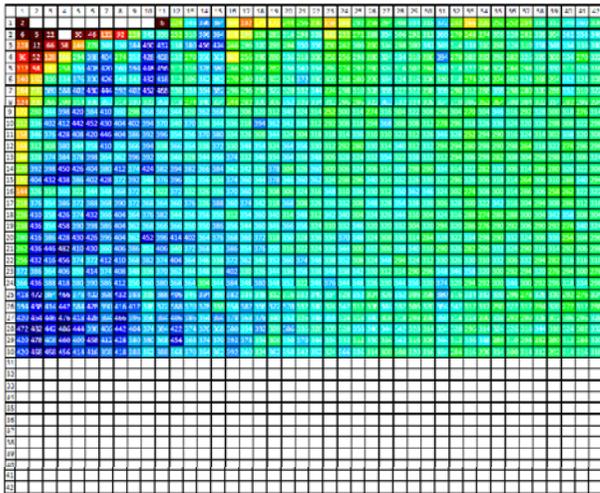
- разведка (10к попыток на удалениях M in $\{70, 80\}$)
- подробный анализ (100к попыток на удалениях M in $\{50, 60, 70, 80\}$, итеративное повторение при необходимости)

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3	7	5	1	0	9	4	8	2	6
2	8	6	4	9	0	1	3	5	7
6	5	7	9	8	1	0	2	4	3
8	2	9	6	1	4	3	0	7	5
9	4	3	7	5	8	2	6	1	0
4	3	0	8	7	2	5	9	6	1
5	9	1	2	6	3	7	4	0	8
1	6	8	0	2	7	9	5	3	4
7	0	4	5	3	6	8	1	9	2

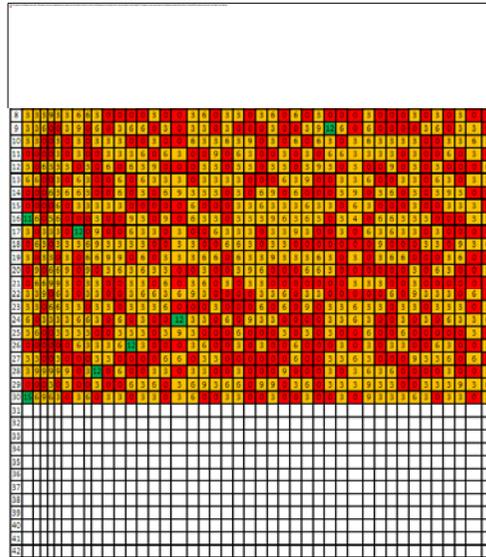
Пример частично-горизонтально-симметричного ДЛК



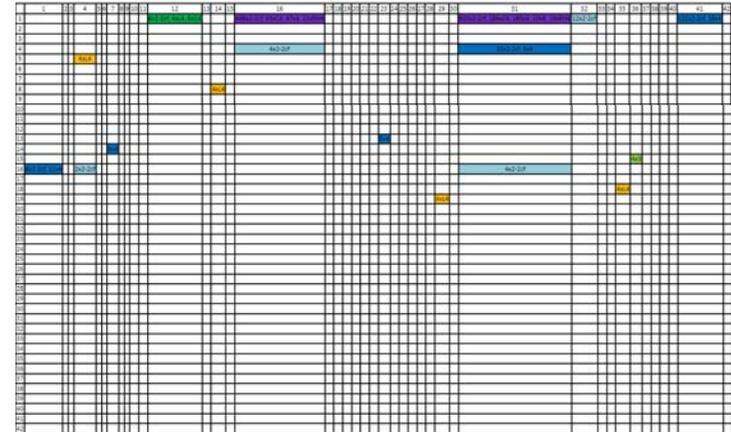
Поиск ОДЛК порядка 10 в окрестностях обобщенных симметрий: 4-й срез



Карта расположения однушек



Карта расположения двушек

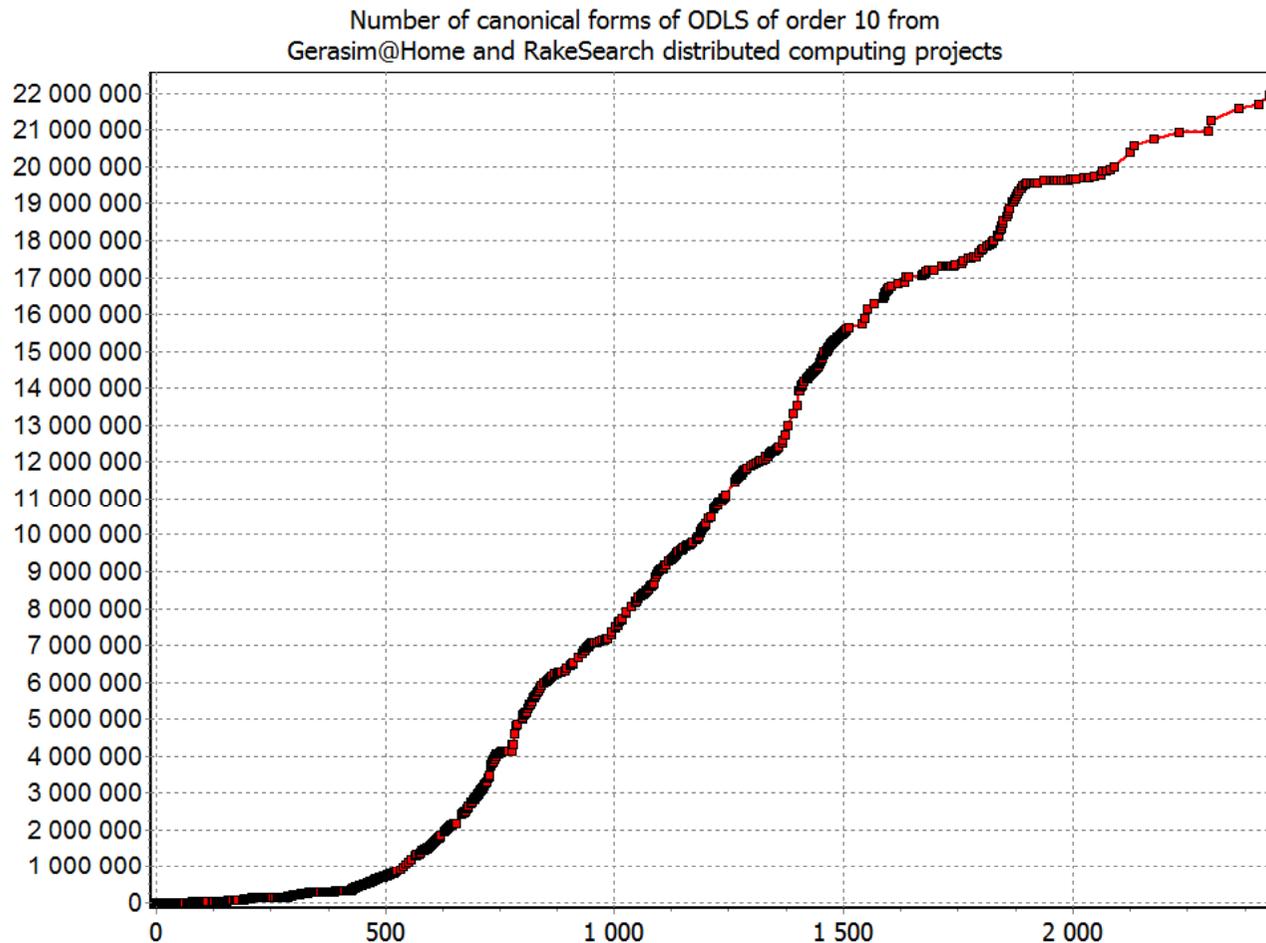


Расположение редких комбинаторных структур

- на 30 млн. «пустышек» ~ 1 пара ОДЛК (2 однушки, ~ 8 часов)
- на 500 – 1000 однушек ~ 1 двушка
- за 1 месяц расчетов в RakeSearch ~ единственный цикл-4, звезда 1:3, звезда 1:4 или линия-4
- все остальное — крайне редкие комбинаторные структуры (рыба, скат, ромбы, ...)



Поиск ОДЛК порядка 10: общее число находок



На перспективу:

- совмещение методов поиска ОДЛК и эвристической аппроксимации спектров;
- расширенные парастрофические преобразования;
- ...



Анализ свойств циклических, полуциклических, пандиагональных, диагонализированных циклических ЛК/ДЛК

- min/max значение быстроисчисляемых числовых характеристик;
- построение соответствующих спектров, анализ особенностей в спектрах.

[На главную](#) | [Фотоальбом](#) | [Мои школьные друзья](#) | [Шпаргалки](#) | [Юмор](#) | [Для студентов](#) | [OEIS](#)

Мои последовательности в OEIS

Циклические ДЛК

Перечисление:

- [A338562](#) — Число циклических диагональных латинских квадратов порядка $N=2n+1$
- [A123565](#) — Число циклических диагональных латинских квадратов порядка N с фиксированной первой строкой (*ряд был известен до меня, установлена связь с циклическими ДЛК*)
- [A232991](#) (для n), [A011655](#) (для $2n+1$) — Бинарные последовательности для циклических диагональных латинских квадратов (*ряды были известны до меня, установлена связь с существованием циклических ДЛК соответствующих порядков*)
- [A341585](#) — Число главных классов латинских квадратов порядка $N=2n+1$, содержащих циклические ДЛК ($N<23$), [подтверждающий список](#)
- [A343866](#) — Число неэквивалентных циклических диагональных латинских квадратов порядка $N=2n+1$ с точностью до поворотов, отражений и перенумерации элементов (*ряд посчитан А. Новиковым*)

Трансверсали:

- [A348212](#) — Число трансверсалей в циклических диагональных латинских квадратах порядка N ($N<26$)
- [A342998](#) — Минимальное число диагональных трансверсалей в циклических диагональных латинских квадратах порядка $N=2n+1$ ($N<20$), [подтверждающий список](#)
- [A342997](#) — Максимальное число диагональных трансверсалей в циклических диагональных латинских квадратах порядка $N=2n+1$ ($N<20$), [подтверждающий список](#)

Интеркаляты:

число интеркалятов для всех циклических ДЛК равно нулю

Главные классы:

- [Axxxxxx](#) (1, 0, 4, 32, 0, 1536, 7680, 0) — Минимальная мощность главного класса в циклических диагональных латинских квадратах порядка $N=2n+1$ ($N<16$)
- [Axxxxxx](#) (1, 0, 4, 32, 0, 1536, 15360, 0) — Максимальная мощность главного класса в циклических диагональных латинских квадратах порядка $N=2n+1$ ($N<16$)

Спектры числовых характеристик:

- [A130226](#) — Трансверсали в циклических диагональных латинских квадратах порядка $N=2n+1$ (значению числа трансверсалей совпадают для всех циклических ДЛК, поэтому мощность спектра равна 1, если циклические ДЛК выбранного порядка N существуют, и 0, если не существуют)
- [A341585](#) — Диагональные трансверсали в циклических диагональных латинских квадратах порядка $N=2n+1$ (совпадает с числом главных классов, по крайней мере для порядков $N<=19$), [подтверждающие списки \(1, 5, 7, 11, 13, 17, 19\)](#), [в графическом виде](#)
- [A-----](#) — Интеркаляты в циклических диагональных латинских квадратах порядка N (все равны нулю)

Порядки, для которых существуют циклические ДЛК:

- [A007310](#) — Значения порядков
- [A120325](#) — Бинарная последовательность (со смещением +3)

Полуциклические ДЛК (горизонтально полуциклические ДЛК получаются путем всех возможных перестановок строк циклического ДЛК):

Перечисление:

- [A342990](#) — Число горизонтально полуциклических диагональных латинских квадратов порядка $N=2n+1$ ($N<34$)
- [A071607](#) — Число горизонтально полуциклических диагональных латинских квадратов порядка $N=2n+1$ с фиксированной первой строкой ($N<34$) (*ряд был известен до меня, установлена связь с полуциклическими ДЛК*)
- [A366331](#) (1, 0, 1, 1, 0, 2, 20, 0, 272, 1208, 0) — Число главных классов диагональных латинских квадратов порядка $N=2n+1$, содержащих горизонтально полуциклические ДЛК ($N<23$), [подтверждающие списки](#) (33 КБ)

Трансверсали:

- [A348212](#) — Число трансверсалей в полуциклических диагональных латинских квадратах порядка $N=2n+1$ (совпадает с числом трансверсалей в циклических ЛК/ДЛК порядка $N=2n+1$)
- [A366332](#) — Минимальное число диагональных трансверсалей в полуциклических диагональных латинских квадратах порядка $N=2n+1$ ($N<23$), [подтверждающий список](#)
- [A342997](#) — Максимальное число диагональных трансверсалей в полуциклических диагональных латинских квадратах порядка $N=2n+1$ (совпадает с максимальным числом диагональных трансверсалей в циклических ДЛК порядка $N=2n+1$)

Интеркаляты:

- [A-----](#) — Интеркаляты в полуциклических диагональных латинских квадратах порядка N (все равны нулю)

Спектры числовых характеристик:

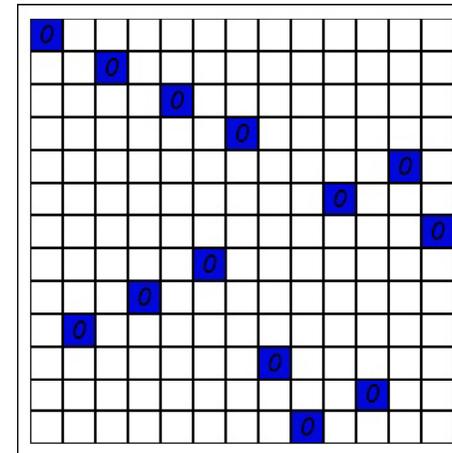
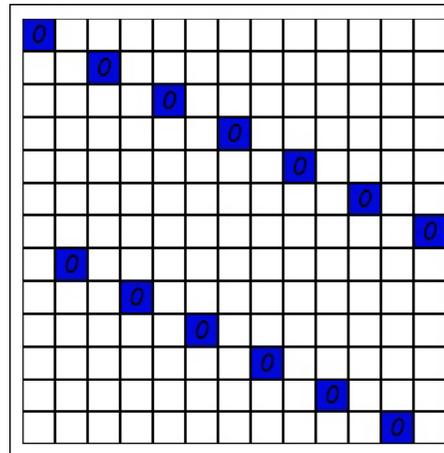
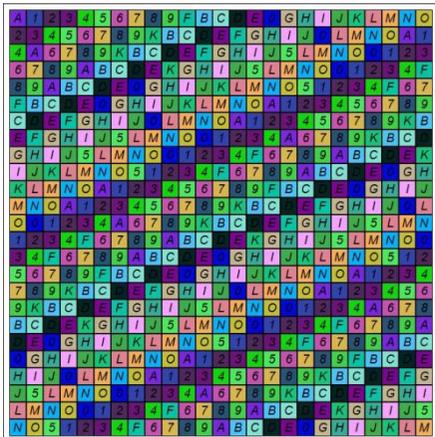
- <http://evatutin.narod.ru/oeis.html>



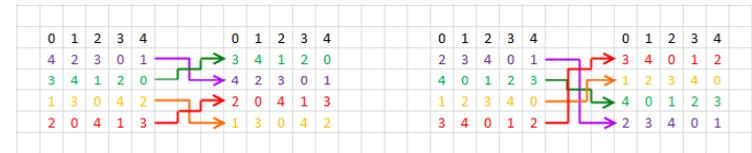
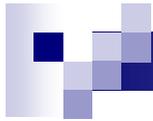
Алгоритмы построения пандиагональных ЛК различного типа

Особенности:

- существуют только для нечетных порядков;
- для порядков $N \leq 11$ существуют только циклические пандиагональные ЛК;
- начиная с порядков $N \geq 13$ появляются различные типы:
 - циклические;
 - полуциклические (горизонтально или вертикально);
 - повернутые (главно-диагонально- или побочно-диагонально-полуциклические);
 - пандиагональные Даббагяна и Ву (только для простых порядков $N=6k+1$, $k > 1$);
 - составные пандиагональные (для порядков $N=p_1 * p_2$);
 - полуциклические пандиагональные Аткина-Хея-Ларсона (D_x, D_y, D_v);
 - пандиагональные от решения задачи о размещении ферзей на тороидальной доске (toroidal n-queens problem);
 - возможно какие-то еще типы...



Ферзи на тороидальной доске размера 13×13



Спасибо за внимание!

Выражаем благодарность всем добровольцам,
принимавшим участие в проекте добровольных
распределенных вычислений RakeSearch!

WWW: <http://evatutin.narod.ru>, <https://rake.boincfast.ru/rakesearch/>
E-mail: evatutin@rambler.ru

